

# Capítulo 2

## Variable compleja

### 2.1 Definiciones de álgebra abstracta

Los métodos y procedimientos aplicados en las ramas de la ingeniería moderna se basan en conceptos matemáticos abstractos. Los siguientes párrafos brindan un breve recorrido por los conjuntos y las estructuras algebraicas que constituyen una base conceptual para la comprensión de dichos métodos. Los términos presentados a continuación se refieren a conceptos tratados ya en otros cursos introductorios de matemática, que sin embargo se incursionan ahora desde un nuevo nivel de abstracción.

#### 2.1.1 Conjuntos

Un *conjunto*  $C$  es una colección de *elementos*  $c_i$  denotada generalmente como

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

La pertenencia del elemento  $c_i$  al conjunto  $C$  se indica con la notación  $c_i \in C$ , lo que se lee como “ $c_i$  en  $C$ ”.

Dos conjuntos se consideran iguales solo si contienen exactamente los mismos elementos, es decir

$$A = B \Leftrightarrow \forall a_i \in A \Rightarrow a_i \in B \wedge \forall b_i \in B \Rightarrow b_i \in A \quad .$$

Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos y todo elemento  $a_i$  en  $A$  está contenido también en  $B$  entonces se dice que  $A$  es un subconjunto de  $B$  (denotado con  $A \subset B$ ). En otras palabras

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a_i \in A \Rightarrow a_i \in B \quad .$$

El conjunto vacío  $\emptyset = \{\}$  es siempre un subconjunto de cualquier otro conjunto, y un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo.

La operación de *unión* entre dos o más conjuntos de una colección  $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$  es el conjunto de todos los elementos contenidos en al menos uno de los conjuntos

$C_1, C_2, C_3, \dots$  y se denota con  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots = \bigcup_i C_i$ , es decir,

$$\bigcup_i C_i = \{c \mid c \in C_1 \vee c \in C_2 \vee c \in C_3 \vee \dots\}$$

La *intersección* entre dos o más conjuntos de un colección  $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$  es el conjunto de elementos contenidos en todos los conjuntos, y se denota con  $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots = \bigcap_i C_i$ . Matemáticamente

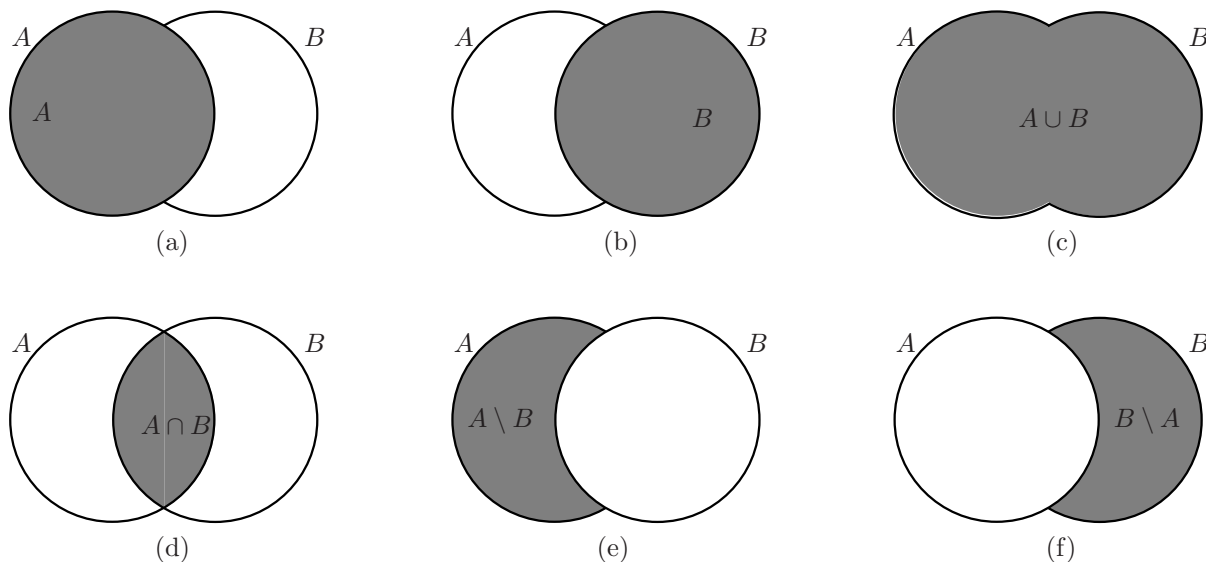
$$\bigcap_i C_i = \{c \mid c \in C_1 \wedge c \in C_2 \wedge c \in C_3 \wedge \dots\}$$

La *diferencia* entre dos conjuntos se denota como  $A \setminus B$  y es el conjunto de todos los elementos de  $A$  que no están en  $B$ , es decir

$$A \setminus B = \{c \mid c \in A \wedge c \notin B\}$$

Lo anterior implica que  $(A \setminus B) \cap A = (A \setminus B)$  y  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ .

La figura 2.1 muestra la representación en diagramas de Venn de las operaciones anteriores.



**Figura 2.1:** Representación en diagramas de Venn de operaciones entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ . Las regiones sombreadas representan (a) el conjunto  $A$ , (b) el conjunto  $B$ , (c) la unión de  $A$  y  $B$ , (d) la intersección de  $A$  y  $B$ , (e)  $A$  menos  $B$ , (f)  $B$  menos  $A$ .

El *producto cartesiano* de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \times B$ , es un conjunto que contiene todos los pares ordenados  $(a, b)$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Este concepto se extiende a más de dos conjuntos, reemplazando los pares ordenados por tuplas. Por ejemplo, el conjunto  $A \times B \times C$  contiene todas las tuplas  $(a, b, c)$  con  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $c \in C$ .

## 2.1.2 Estructuras algebraicas

Una *estructura algebraica* se compone de dos partes: por un lado un conjunto (como por ejemplo el conjunto de los números naturales, un conjunto binario de dos elementos  $\{0, 1\}$ , el conjunto de los números racionales, etc.) y por otro lado una o varias *operaciones* que deben satisfacer *axiomas* dados. La estructura algebraica se denota con  $(C, O)$  donde  $C$  denota al conjunto y  $O$  al conjunto de operaciones. Si no hay ambigüedades usualmente se usa  $C$  para denotar tanto al conjunto como a la estructura algebraica.

Las operaciones involucradas son usualmente *unarias* o *binarias*, implicando el número de elementos que toma la operación para producir un nuevo elemento. Las operaciones unarias toman un solo elemento (por ejemplo, el valor absoluto de un número) y se representan como una relación entre elementos de dos conjuntos  $C \rightarrow D$ . Las operaciones binarias toman dos elementos para producir uno nuevo, lo que se denota con  $C \times C \rightarrow D$  (por ejemplo, la operación *suma* toma usualmente dos números para producir otro elemento). Se dice que la operación es *cerrada* si su aplicación a elementos de  $C$  produce elementos también en  $C$  (por ejemplo,  $C \rightarrow C$  o  $C \times C \rightarrow C$ ).

Si una operación binaria<sup>1</sup>  $\diamond$  mapea  $n \diamond x$  ó  $x \diamond n$  hacia el mismo elemento  $x$ , entonces a  $n$  se le denomina *elemento neutro*, o elemento *identidad* de dicha operación. Un elemento  $x$  se denomina *inverso* de un elemento  $y$  con respecto a la operación  $\diamond$  si se cumple  $x \diamond y = n$  donde  $n$  es el elemento neutro de  $\diamond$ . La operación binaria  $\diamond$  es asociativa si se cumple  $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ , y es conmutativa si  $a \diamond b = b \diamond a$ .

Sean  $\diamond$  y  $\star$  dos operaciones binarias. Se dice que  $\diamond$  es distributiva con respecto a  $\star$  si se cumple  $a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$  y  $(b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$ .

Algunas estructuras algebraicas se listan a continuación:

### Estructuras simples

- **Conjunto** es un caso especial de una estructura algebraica con una colección vacía de operaciones.
- **Sistema unario** es una estructura conformada por un conjunto  $C$  y una operación unaria.

### Estructuras similares a grupos

- **Magnas o grupoides** son estructuras con una sola operación binaria.
- **Semigrupo** es un magma en el que la operación binaria es asociativa.
- **Monoide** es un semigrupo con un elemento identidad.
- **Monoide conmutativo** es un monoide con operación conmutativa.
- **Grupo** es un monoide en el que cada elemento tiene un inverso. Es decir, el grupo

<sup>1</sup>Nótese que la operación  $\diamond$  denota cualquier operación binaria, como suma, resta, multiplicación, división, funciones lógicas, etc.

tiene una operación binaria asociativa con elemento identidad y con elemento inverso.

- **Grupo abeliano** es un grupo donde la operación es además conmutativa.

La tabla 2.1 sintetiza la información anterior.

**Tabla 2.1:** Estructuras similares a grupos.

<i>Estructura</i>	<i>Operación</i>
magma	conjunto más operación binaria
semigrupo	magma con operación además asociativa
monoide	semigrupo con elemento identidad
monoide conmutativo	monoide con operación conmutativa
grupo	monoide con elemento inverso
grupo abeliano	grupo con operación conmutativa

### Estructuras similares a anillos

- **Semianillo** es una estructura algebraica con dos operaciones de monoide.
- **Anillo** es un semianillo con una operación de monoide (como el producto) y otra operación de grupo abeliano (como la suma), ambas satisfaciendo la distributividad.
- **Anillo conmutativo** es un anillo donde la operación de monoide (el producto) es además conmutativa.
- **Anillo de división** Es un anillo en el que los elementos neutros de ambas operaciones son diferentes, y donde todo elemento diferente del elemento neutro de la operación de grupo abeliano (como por ejemplo el 0 si la operación es la suma) tiene un inverso con respecto a la operación de monoide.
- **Cuerpo** es un anillo de división donde ambas operaciones son conmutativas.

La tabla 2.2 sintetiza las propiedades de las operaciones en estas estructuras, donde los símbolos “+” y “×” deben entenderse en un contexto general, indicando dos operaciones no necesariamente relacionadas con la suma y el producto conocidas en aritmética.

**Tabla 2.2:** Estructuras similares a anillos

<i>Estructura</i>	<i>Operación “+”</i>	<i>Operación “×”</i>
semianillo	operación de monoide	operación de monoide
anillo	operación de grupo abeliano	“
anillo de división	“	operación de grupo
cuerpo	“	operación de grupo abeliano

### 2.1.3 Números naturales

La cardinalidad de un conjunto  $C$  es el *número* de elementos que contiene ese conjunto y se denota con  $|C|$ . El conjunto de todas las posibles cardinalidades de conjuntos es el llamado conjunto de los números naturales, es decir, los números naturales se pueden utilizar para contar los elementos de un conjunto. Este conjunto se denota con  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , donde el cero se incluirá aquí de acuerdo a la tendencia seguida en teoría de conjuntos, lógica e informática, puesto que en otras áreas (como en teoría de números), el cero es excluido de los números naturales. Para hacer explícita la inclusión del cero se encontrará en ocasiones el símbolo  $\mathbb{N}_0$  y para denotar la exclusión del cero se usa  $\mathbb{N}^*$  o  $\mathbb{N}^+$ .

Los números naturales se utilizan tanto para contar (el número de elementos de un conjunto), como para ordenar (un elemento de un conjunto se encuentra “antes” que otro, es “mayor” que otro, etc.).

Estos números se pueden definir a través de los *axiomas de Peano*:

- Existe un número natural 0.
- Todo número natural  $a$  tiene un número natural sucesor, denotado con  $S(a)$ .
- No existe ningún número natural cuyo sucesor es 0.
- Dos números naturales distintos tienen sucesores distintos, es decir, si  $a \neq b$  entonces  $S(a) \neq S(b)$ .
- Si 0 tiene una propiedad y el sucesor de cualquier número natural tiene también esa propiedad, entonces la propiedad es de todos los números naturales.

La *suma* de dos números naturales se puede definir recursivamente definiendo como elemento neutro a 0 ( $a + 0 = a$ ) y  $a + S(b) = S(a + b)$  para todo  $a, b$ . Con esta definición  $(\mathbb{N}, +)$  es un monoide conmutativo. Si se define  $S(0) = 1$  entonces  $S(b) = S(b + 0) = b + S(0) = b + 1$ , es decir, el sucesor de  $b$  es simplemente  $b + 1$ .

La *multiplicación*  $\times$  se puede definir a partir de la suma con  $a \times 0 = 0$  y  $a \times S(b) = (a \times b) + a$ . Esto hace de  $(\mathbb{N}, \times)$  un monoide conmutativo con elemento neutro 1.

Los números naturales junto con la suma y multiplicación definidas anteriormente conforman un semianillo conmutativo  $(\mathbb{N}, \{+, \times\})$ . Ambas operaciones son *cerradas*, lo que quiere decir que la suma o multiplicación de dos números naturales es siempre otro número natural.

### 2.1.4 Los números enteros

El conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$  contiene a los números naturales  $\mathbb{N}$  más el conjunto de los números enteros negativos, que constituyen inversos aditivos de los números naturales positivos. Por ello, este conjunto junto con la operación suma es un grupo abeliano, mientras que  $\mathbb{Z}$  junto con la multiplicación es un monoide conmutativo. La tabla 2.3 resume las propiedades en ambos casos. Nótese que, a diferencia de los números naturales quienes no tienen inverso ni en la suma ni en la multiplicación, los números enteros si

**Tabla 2.3:** Propiedades de la suma y la multiplicación con  $\mathbb{Z}$ .

	Suma	Multiplicación
	$(\mathbb{Z}, \{+\})$ : grupo abeliano	$(\mathbb{Z}, \{\times\})$ : monoide conmutativo
Es cerrada	$a + b$ es entero	$a \times b$ es entero
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Elemento inverso	$a + (-a) = 0$	no hay
Distributividad		$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

tienen elementos inversos para la suma y por tanto  $(\mathbb{Z}, \{+, \times\})$  es un anillo conmutativo. Se puede definir ahora la operación *resta*, que es cerrada pero no conmutativa, como la suma del primer elemento con el inverso aditivo del segundo ( $a - b = a + (-b)$ ).

### 2.1.5 Los números racionales

Los elementos de este conjunto se pueden definir a través de pares ordenados de números enteros  $(a, b)$  con  $b$  diferente al elemento neutral de la suma (es decir, diferente de cero). El par ordenado representando un número racional se denota usualmente como  $a/b$  ó  $\frac{a}{b}$ .

Dos números racionales  $(a, b)$  y  $(c, d)$  se dicen equivalentes si se cumple  $a \times d = b \times c$ . Esta equivalencia se denota con  $(a, b) \sim (c, d)$ , aunque por lo general se utiliza directamente la relación de igualdad (por ejemplo, se escribe  $(2; 4) = (1; 2)$ , ó  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ). Se define orden en el conjunto  $\mathbb{Q}$  a través del operador  $\leq$ , donde se cumple  $(a, b) \leq (c, d)$  si y solo si  $a \times d \leq b \times c$ .

La suma y multiplicación de los números racionales se definen a partir del producto y multiplicación de los números enteros como

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a \times d + b \times c, b \times d) \\ (a, b) \times (c, d) &= (a \times c, b \times d) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Puesto que, a diferencia del conjunto de los números enteros, existe para cada elemento en  $\mathbb{Q}$  un inverso multiplicativo, se concluye que el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo.

### 2.1.6 Los números reales

Los números racionales no pueden representar todos los puntos de una recta ideal infinita. Aquellos puntos de dicha recta no cubiertos por los números racionales conforman el conjunto de los números irracionales  $\mathbb{I}$ , que tienen como característica fundamental una representación decimal de longitud infinita que no sigue ningún patrón (por ejemplo,

$\sqrt{2} = 1,41423\dots$  o  $\pi = 3,1415927\dots$ ). El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  se define entonces como  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ , o en otras palabras, el conjunto que tiene una correspondencia uno a uno con todos los puntos de una recta infinita.

El conjunto de los números reales es un *cuero*, donde a las operaciones binarias suma y multiplicación corresponden las operaciones inversas de substracción y división, respectivamente. El conjunto  $\mathbb{R}$  es también ordenado, es decir, para el operador ordinal  $\geq$  se cumple:

$$\begin{aligned} x \geq y &\Rightarrow x + z \geq y + z \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 &\Rightarrow x \times y \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Los números reales son *completos*, propiedad que se define a través de la existencia de *secuencias de Cauchy*. Una secuencia  $(x_n)$  de números reales se denomina secuencia de Cauchy si para cualquier  $\epsilon > 0$  infinitesimalmente pequeño existe un entero  $N$  tal que la distancia  $|x_n - x_m|$  es menor que  $\epsilon$  cuando  $n$  y  $m$  son ambos mayores que  $N$ . En otras palabras la secuencia es de Cauchy si sus elementos se acercan arbitrariamente conforme  $n$  crece.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, n > N, m > N : |x_n - x_m| < \epsilon \quad (2.3)$$

Se dice que la secuencia  $(x_n)$  converge a  $x$  si  $|x_n - x| < \epsilon$  para  $n > N$ . En el caso de los números reales y racionales, cualquier secuencia convergente es una secuencia de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > N : |x_n - x| < \epsilon \quad (2.4)$$

Para los números reales se cumple además que cualquier secuencia de Cauchy es convergente, lo que no se cumple para los números racionales. Por ejemplo, la secuencia

$$\left( 1; 1,5; \dots; x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right); \dots \right)$$

converge a  $\sqrt{2}$  que no se encuentra en  $\mathbb{Q}$ . Lo mismo ocurre con la secuencia

$$(1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots)$$

### 2.1.7 Los números complejos

El conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  es una extensión de los números reales que es cerrada ante las operaciones de potenciación (por ejemplo,  $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ), o expresado de otra forma, este conjunto contiene todas las raíces de polinomios, lo que no es posible en  $\mathbb{R}$ .

Formalmente los números complejos se definen como pares ordenados de números reales  $(a, b)$  que junto con las operaciones

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \times (c, d) &= (a \times c - b \times d, b \times c + a \times d) \end{aligned} \quad (2.5)$$

conforma un cuerpo algebraico, por lo que se deben cumplir los siguientes axiomas para los números complejos  $s, w, z$

1.  $z + w \in \mathbb{C}, z \times w \in \mathbb{C}$  (ley de clausura)
2.  $z + w = w + z$  (ley conmutativa de la adición)
3.  $z + (w + s) = (z + w) + s$  (ley asociativa de la adición)
4.  $z \times w = w \times z$  (ley conmutativa de la multiplicación)
5.  $z \times (w \times s) = (z \times w) \times s$  (ley asociativa de la multiplicación)
6.  $z \times (w + s) = z \times w + z \times s$  (ley distributiva)
7.  $z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$  (elemento neutro de la suma es  $(0, 0)$ )
8.  $(1, 0) \times z = z \times (1, 0) = z$  (elemento neutro de la multiplicación es  $(1, 0)$ )
9. Para todo  $z \in \mathbb{C}$  existe un solo elemento  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z + w = (0, 0)$  (Existencia de elemento inverso único con respecto a la suma)
10. Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus (0, 0)$  existe un solo elemento  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z \times w = w \times z = (1, 0)$  (Existencia de elemento inverso único con respecto a la multiplicación)

Sea el número complejo  $z = (a, b)$ . Al número real  $a$  se le denomina *componente real* y al número real  $b$  *componente imaginaria* de  $z$ . Por convención, se dice que el número complejo  $(a, 0)$  corresponde con el número real “puro”  $a$ . Puesto que  $(a, 0) \times (c, d) = (a \times c, a \times d)$  la notación se puede simplificar como  $a \times (c, d)$ . De esta forma se cumple que  $z = (a, b) = a \times (1, 0) + b \times (0, 1)$ . Puesto que el número  $(1, 0)$  es el elemento neutro de la multiplicación y denotando a  $(0, 1)$  como  $j$  se obtiene la notación convencional de números complejos  $z = a + jb$ , donde se ha simplificado además la notación del producto  $j \times b$  por  $jb$ .

Se dice que dos números complejos son iguales si y solo si tanto sus componentes reales como imaginarias son iguales, es decir

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \quad (2.6)$$

A diferencia de los conjuntos anteriores, los números complejos *no* son ordenados, es decir, no es posible indicar si un número complejo es mayor o menor que otro.

La tabla 2.4 sintetiza las relaciones de las estructuras algebraicas revisadas desde los números naturales hasta los números complejos.

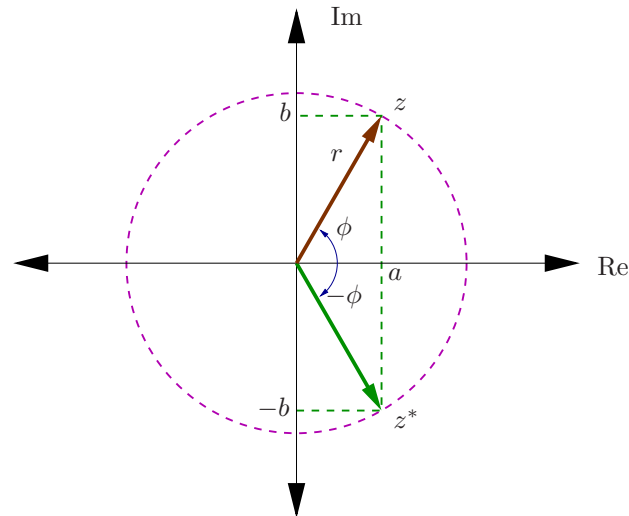
**Tabla 2.4:** Estructuras algebraicas numéricas.

	$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$	$\subset$	$\mathbb{C}$
	semianillo		anillo		cuerpo		cuerpo		cuerpo
	conmutativo								
Operaciones cerradas	$+, \times$		$+, -, \times$		$+, -, \times, /$		$+, -, \times, /$		$+, -, \times, /, a^b$
							sec. Cauchy		sec. Cauchy
Ordinalidad	sí		sí		sí		sí		no



## Plano complejo

El número complejo  $z = (a, b) = a + jb$  se puede representar geoméricamente como un punto en un sistema coordenado cartesiano, llamado el *plano complejo* o también *diagrama de Argand* o de *Wessel*, donde el eje horizontal representa la componente real y el eje vertical la componente imaginaria (figura 2.2).



**Figura 2.2:** Diagrama de Argand representando a  $z = a + jb$  y  $z^* = a - jb$ .

En este diagrama el número complejo puede también representarse por medio de una notación polar con *magnitud* o *módulo*  $r = |z| = \text{mag}(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$  que es siempre positivo y *argumento* o *ángulo*  $\phi = \angle z = \arg(z) = \arctan(b/a)$  que se indica usualmente entre  $-\pi$  y  $\pi$  o entre  $0$  y  $2\pi$ . Se debe cumplir entonces  $z = a + jb = r \times (\cos \phi + j \text{sen } \phi)$ , es decir, la componente real es  $a = r \times \cos \phi$  y la componente imaginaria  $b = r \times \text{sen } \phi$ .

## Identidad de Euler

La identidad o fórmula de Euler afirma para un ángulo de valor real  $\phi$  que

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \text{sen } \phi \quad (2.7)$$

con lo que un número complejo  $z = a + jb = r \times (\cos \phi + j \text{sen } \phi)$  se puede representar como  $z = r \times e^{j\phi}$ , o simplificando la notación del producto  $z = r e^{j\phi}$ . Esto se puede demostrar de varias maneras, de las cuales aquí se presentarán dos: una por medio de series de Taylor y otra por medio de cálculo.

Se puede demostrar fácilmente que  $j^0 = 1, j^1 = j, j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1 \dots, j^{n+4} = j^n, \dots$ . Con la variable real  $x$  se puede obtener que las series de Taylor de las funciones  $e^x, \text{sen}(x)$

y  $\cos(x)$  están dadas por

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \text{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Asumiendo por ahora que las series de Taylor mantienen su validez cuando  $x$  se sustituye por el número complejo<sup>2</sup>  $j\phi$  (con  $\phi$  real) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{j\phi} &= 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{j\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots\right) + j \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos(\phi) + j \text{sen}(\phi) \end{aligned}$$

Para demostrar el teorema utilizando cálculo defínase el número complejo  $x = \cos(\phi) + j \text{sen}(\phi)$ . Derivando con respecto a la variable real  $\phi$  se obtiene

$$\frac{dx}{d\phi} = -\text{sen}(\phi) + j \cos(\phi) = j^2 \text{sen}(\phi) + j \cos(\phi) = j(\cos(\phi) + j \text{sen}(\phi)) = jx$$

Separando las variables e integrando a ambos lados se obtiene (asumiendo de nuevo que las propiedades de integración se mantienen para la variable compleja).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \int j d\phi \\ \ln x &= j\phi + C \end{aligned}$$

Si se hace  $\phi = 0$  y considerando que  $x = \cos(0) + j \text{sen}(0) = 1$  se obtiene que  $C = 0$ , por lo que

$$\begin{aligned} \ln x &= j\phi \\ e^{\ln x} &= e^{j\phi} \\ x &= e^{j\phi} \\ e^{j\phi} &= \cos(\phi) + j \text{sen}(\phi) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Matemáticamente la validez de esto se justifica por el principio de *continuación analítica*, que establece que si una función real es infinitamente diferenciable en un intervalo  $]a, b[$  y tiene una expansión en serie de Taylor, entonces la función de variable compleja obtenida sustituyendo la variable real  $x$  por la variable compleja  $z$  tendrá la misma serie de Taylor con la variable también reemplazada y convergerá para todo el plano complejo  $z$  si la serie real correspondiente converge para todo  $x$  real. (esto se retomará en la sección 2.4).

De la identidad de Euler se puede derivar fácilmente que:

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \\ \text{sen } \phi &= \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}\end{aligned}$$

### Operaciones con números complejos

Las siguientes son notaciones equivalentes para los números complejos

$$z = (a, b) = a + jb = r\angle\theta = re^{j\theta} = r \exp(j\theta) \quad (2.8)$$

donde la componente real  $a$ , la componente imaginaria  $b$ , la magnitud  $r$  y el argumento  $\theta$  son todos números reales relacionados por las ecuaciones  $a = r \times \cos \theta$ ,  $b = r \times \text{sen } \theta$ . Nótese que para estas últimas identidades se obtiene que los argumentos  $\theta$  y  $2k\pi\theta$  con  $k \in \mathbb{Z}$  son equivalentes por ser el seno y el coseno funciones periódicas de periodo  $2\pi$ . Es decir

$$z = re^{j\theta} = re^{j(\theta+2k\pi)} \quad (2.9)$$

**Conjugación compleja** Una operación básica de los números complejos no presente en los números reales es la *conjugación compleja*. Sea  $z = x + jy = re^{j\theta} \in \mathbb{C}$ . La conjugación compleja es una operación unaria que sustituye la componente imaginaria del número por su inverso aditivo y se denota con un superíndice  $*$  ( $z^*$ ) o con una línea horizontal sobre la variable ( $\bar{z}$ ). Puesto que el inverso aditivo de cero es a su vez cero, entonces el complejo conjugado de un número real  $x = x + j0$  es igual a  $x - j0 = x$  que equivale al mismo número real.

La conjugación compleja es además equivalente a intercambiar el argumento del número por su inverso aditivo (ver figura 2.2). De esta forma  $z^* = x - jy = re^{-j\theta}$ .

Los números complejos conjugados juegan un papel importante en modelos de fenómenos y sistemas reales, pues si el modelo de estos sistemas puede plantearse en términos de polinomios de orden  $n$  de la forma

$$P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (2.10)$$

entonces existirán exactamente  $n$  raíces  $z_i$  (también llamadas ceros del polinomio, pues  $P_n(z_i) = 0$ ) las cuales pueden ser iguales o distintas. Cuando los coeficientes  $a_i$  son reales, las raíces  $z_i$  podrán ser números reales o complejos, presentándose siempre las raíces no reales en pares complejos conjugados.

**Valor absoluto o magnitud** El *valor absoluto*, *módulo* o *magnitud* de un número complejo  $z = x + jy = re^{j\theta}$  se definió anteriormente como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Nótese además que  $z \times z^* = z^* \times z = x^2 + y^2$  y por lo tanto  $|z|^2 = r^2 = z \times z^*$  o lo que es lo mismo  $|z| = r = \sqrt{z \times z^*}$ .

Se cumple además

1.  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
2.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  (con  $z_2 \neq 0$ )
3.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4.  $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

donde las primeras dos igualdades se demuestran utilizando el hecho de que

$$|z| = |re^{j\theta}| = \sqrt{r^2 \times (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta)} = r.$$

**Suma y Resta** Sean los números complejos  $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\theta_1}$  y  $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ . Para la suma y resta se cumple:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} z_1^* + z_2^* &= (x_1 - jy_1) + (x_2 - jy_2) = (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2) \\ &= (z_1 + z_2)^* \end{aligned}$$

y en general para  $n$  números complejos  $z_i = x_i + jy_i$  se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i^* &= \sum_{i=1}^n (x_i - jy_i) = \sum_{i=1}^n x_i - j \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^* . \end{aligned}$$

El lector puede además demostrar que:

$$z_1 + z_1^* = 2 \text{Re}\{z_1\} \quad (2.11)$$

$$z_1 - z_1^* = j2 \text{Im}\{z_1\} \quad (2.12)$$

**Multiplicación y División** Para los números complejos  $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\theta_1}$  y  $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\theta_2}$  se cumple:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

donde se ha simplificado la notación del producto de número reales y complejos  $z_1 \times z_2$  por  $z_1 z_2$ .

De las ecuaciones anteriores resulta claro que, analíticamente, es más simple utilizar las notaciones polares para resolver productos y divisiones de números complejos.

De forma similar al caso de la suma de números conjugados se cumple con la multiplicación

$$\begin{aligned} z_1^* \times z_2^* &= (r_1 e^{-j\theta_1})(r_2 e^{-j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= (z_1 \times z_2)^* \end{aligned}$$

y en general para  $n$  números complejos  $z_i = r_i e^{j\theta_i}$  se cumple

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n z_i^* &= \prod_{i=1}^n (r_i e^{-j\theta_i}) = \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) e^{-j \sum_{i=1}^n \theta_i} \\ &= \left( \prod_{i=1}^n z_i \right)^* . \end{aligned}$$

El lector puede además demostrar que:

$$z_1 \times z_1^* = r_1^2 \quad (2.13)$$

$$\frac{z_1}{z_1^*} = e^{j2\theta_1} \quad (2.14)$$

**Potenciación** Dada una colección de  $n$  números  $z_i = x_i + jy_i = r_i e^{j\theta_i} \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1 \dots n$  puede demostrarse que

$$\prod_{i=1}^n z_i = \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) e^{j \sum_{i=1}^n \theta_i}$$

Para el caso especial en que todos los elementos  $z_i$  sean iguales a  $z = x + jy = r e^{j\theta}$  se obtiene:

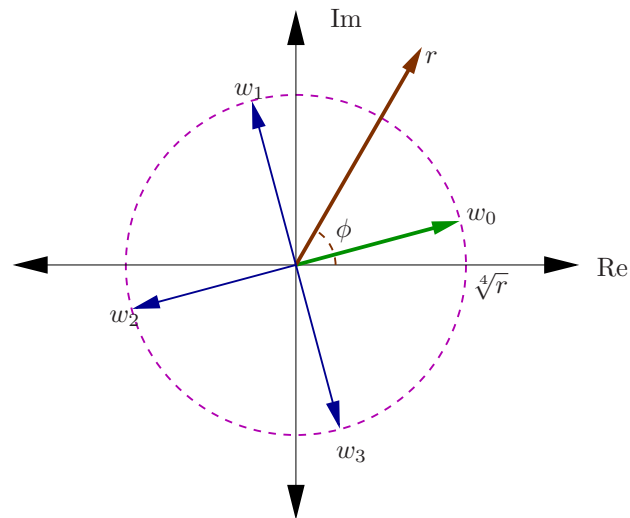
$$\prod_{i=1}^n z = z^n = \left( \prod_{i=1}^n r \right) e^{j \sum_{i=1}^n \theta} = r^n e^{jn\theta} \quad (2.15)$$

A (2.15) se le denomina frecuentemente el teorema de Moivre. Este teorema puede utilizarse para encontrar las  $n$ -ésimas raíces de  $z$  definidas como los números  $w$  que multiplicados por sí mismos  $n$  veces resultan en  $z$ , es decir  $w^n = z$ . Junto con (2.9) puede observarse que

$$w = z^{1/n} = (r e^{j\theta})^{1/n} = (r e^{j(\theta + 2k\pi)})^{1/n} = r^{1/n} e^{j \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

que puede tomar  $n$  valores únicos con  $k = 0, \dots, n - 1$ . En otras palabras, cualquier número complejo  $z$  tiene  $n$   $n$ -ésimas raíces.

Las  $n$   $n$ -ésimas raíces de  $z$  tienen todas la misma magnitud  $|z|^{1/n}$ , lo que implica que se encuentran situadas sobre un círculo en el plano complejo de radio  $|z|^{1/n}$ . Además, la primera raíz tiene un ángulo igual a  $\frac{\arg z}{n}$  y a partir de ésta las otras raíces se distribuyen regularmente sobre el círculo separadas por un ángulo igual a  $2\pi/n$ . La figura 2.3 muestra un ejemplo.



**Figura 2.3:** Ejemplo de las cuatro raíces cuartas de  $re^{j60^\circ}$ .

**Exponenciación** La exponenciación con números complejos mantiene las propiedades presentes en los números reales y extiende la identidad de Euler presentada anteriormente. Así

$$\begin{aligned} e^z &= e^{(x+jy)} \\ &= e^x e^{jy} \\ &= e^x \cos(y) + j e^x \sen(y) \end{aligned}$$

que es un número de magnitud  $e^x$  con ángulo igual a  $y$ , parte real  $e^x \cos(y)$  y parte imaginaria  $e^x \sen(y)$ . El lector puede demostrar que se cumple además:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos x \cosh y - j \sen x \sinh y \\ \sen(z) &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \sen x \cosh y + j \cos x \sinh y \end{aligned}$$

**Logaritmo** El logaritmo natural mantiene en los números complejos las mismas propiedades que en los reales, esto quiere decir que, si  $z = re^{j\theta}$  y  $k \in \mathbb{Z}$

$$\ln z = \ln [re^{j(\theta+2k\pi)}] = \ln r + \ln(e^{j(\theta+2k\pi)}) = \ln r + j(\theta + 2k\pi).$$

donde se nota que  $z$  complejo tiene un infinito número de logaritmos. El caso especial  $k = 0$  se denomina *valor principal* y se denota como  $\text{Ln } z = \ln |z| + j\angle z$ .

### 2.1.8 Otros conjuntos

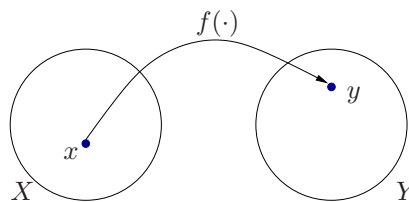
Luego del conjunto de los números complejos encuentran aplicación otras generalizaciones, como las llamadas álgebras de Clifford, en las que se enmarcan conjuntos como cuaterniones, octoniones, sedeniones, etc., utilizados ampliamente en gráficos por computadora.

Estos temas escapan sin embargo a la temática del presente curso. El lector interesado puede buscar más información en [24].

## 2.2 Funciones de variable compleja

Una *función*  $f$  es un concepto matemático que involucra dos conjuntos  $X$  y  $Y$  y una regla o *relación* que asocia a cada elemento  $x \in X$  uno y solo un elemento de  $y \in Y$ . Se dice entonces que  $f$  mapea el elemento  $x$  en el elemento  $y$  (figura 2.4). Esto se denota generalmente como

$$f : X \rightarrow Y \quad y = f(x)$$



**Figura 2.4:** Diagrama de relación funcional entre  $x \in X$  y  $y \in Y$ .

A  $x$  se le denomina variable independiente, puesto que puede tomar cualquier valor arbitrario dentro de  $X$ . La variable dependiente  $y$  adquiere un valor determinado por el valor específico de  $x$  y la función  $f$ . El conjunto  $X$  es el *dominio* de la función  $f$  y el conjunto de todas las imágenes  $\{y \mid y = f(x), x \in X\} \subseteq Y$  es el *conjunto imagen*, *rango* o *codominio* de  $f$ .

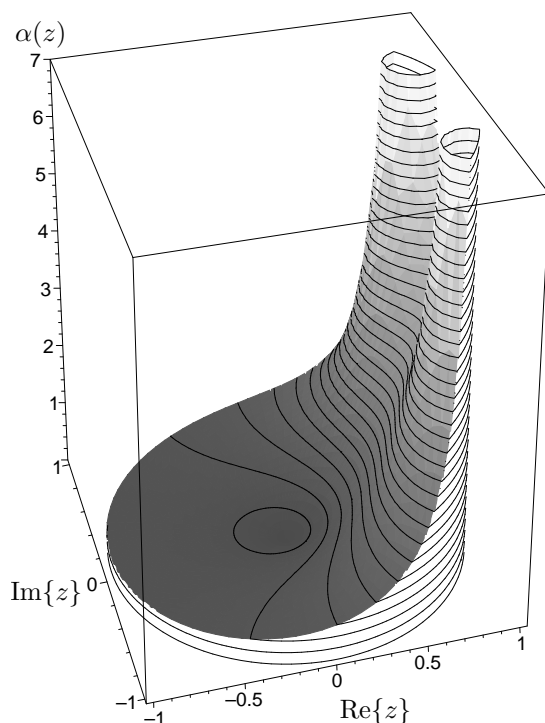
En el presente documento se utilizan principalmente funciones donde  $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ . A diferencia de las funciones de variable y valor reales  $y = f(x)$ , que se pueden representar fácilmente por medio de curvas en un plano cartesiano, la función de variable compleja  $w = f(z)$  con  $w, z \in \mathbb{C}$  no puede ser representada directamente por requerir para ello cuatro dimensiones. Se utilizan entonces varias notaciones. Por un lado, si  $z = x + jy$ ,  $w = u + jv$  y  $w = f(z)$  se cumple entonces que

$$w = f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

es decir, las componentes real e imaginaria son funciones de valor real de dos variables reales ( $u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). A su vez, se deriva directamente que

$$w = f(x, y) = r(x, y)e^{j\theta(x, y)}$$

lo que equivale a decir que  $w$  puede analizarse u observarse a través de su magnitud y argumento. En estos casos,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $r(x, y)$  y  $\theta(x, y)$  son funciones reales de dos variables reales, que pueden representarse en un espacio tridimensional (figura 2.5). Estos conceptos serán retomados posteriormente.



**Figura 2.5:** Representación en un espacio tridimensional de  $\alpha(x, y)$ , con  $\alpha \in \{u, v, r, \theta\}$ .

### 2.2.1 El concepto de mapeo

Mientras que con las representaciones de magnitud, fase, componentes real e imaginaria de funciones de valor y variable compleja se intenta observar cómo varían individualmente éstas con respecto a *todo* el plano complejo  $\mathbb{C}$ , con los llamados *mapeos* se estudia cómo es transformada una región específica del plano  $z$  (que puede ser una recta, una banda, un círculo, etc.) en otra región del plano  $w$  cuando se aplica  $w = f(z)$ .

La idea general de *mapeo* o *transformación* que realiza una función entre los conjuntos  $X$  y  $Y$  provee otro modo de visualización y análisis que se utiliza frecuentemente en ingeniería para simplificar modelos geométricos relativamente complejos. Por ejemplo, en electrostática se utilizan transformaciones que mapean la forma de superficies metálicas hacia planos, con los que los campos eléctricos generados por cargas eléctricas se pueden analizar de forma relativamente simple, para luego aplicar la transformación inversa, que permite derivar cómo se deforman los campos y líneas de fuerza en la configuración original. Un caso similar ocurre en aeronáutica, donde se mapea la forma (o perfil) de un ala a un cilindro que permite aplicar modelos matemáticos más flexibles de las corrientes de aire a su alrededor, para luego invertir el mapeo y observar cuál es el comportamiento del aire con la forma real del ala.

Como función o mapeo inverso de  $w = f(z)$  se conoce a aquel que logra recobrar el valor de  $z$  a partir de su imagen, y se denota como  $z = f^{-1}(w)$ , es decir:

$$w = f(z) \Rightarrow z = f^{-1}(w) = f^{-1}(f(z))$$



No toda función tiene un inverso, aunque en ingeniería son precisamente aquellas funciones invertibles las que encuentran mayor aplicación en casos como los mencionados.

Se denomina como *punto fijo* del mapeo o función  $f$ , aquel donde se cumple  $z = f(z)$ , es decir, un punto que no cambia cuando se le aplica la transformación  $f$ .

**Ejemplo 2.1** Encuentre la imagen en el plano  $w$  de la región lineal  $y = 2x + 4$  del plano  $z = x + jy$  bajo el mapeo  $w = 2z + 6$ . Encuentre los puntos fijos de este mapeo, y su mapeo inverso.

**Solución:** Se sabe que

$$w = u + jv = f(z) = 2z + 6 = 2(x + jy) + 6 = \underbrace{(2x + 6)}_u + j \underbrace{2y}_v$$

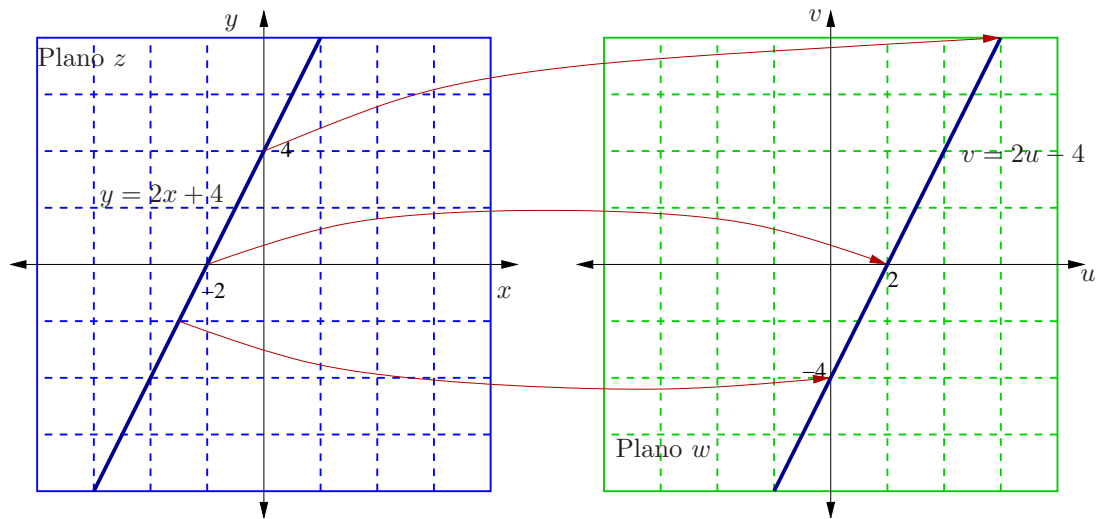
de donde se puede despejar

$$x = \frac{u - 6}{2}$$

y sustituyendo en  $v$  se obtiene

$$v = 2y = 2(2x + 4) = 4x + 8 = 2u - 12 + 8 = 2u - 4$$

lo que corresponde también a una línea recta (figura 2.6). El único punto fijo del mapeo



**Figura 2.6:** Mapeo de  $y = 2x + 4$  por medio de  $w = 2z + 6$ .

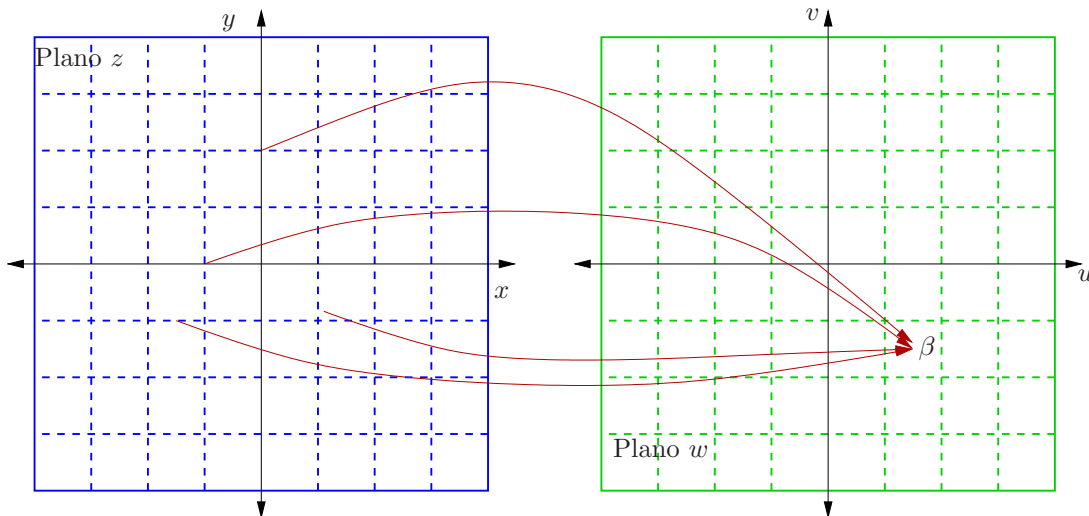
$w = 2z + 6$  es  $z = -6$ , y se encuentra fácilmente resolviendo la ecuación lineal  $z = 2z + 6$ . El mapeo inverso es  $z = \frac{w-6}{2}$ . 2.1

## 2.2.2 Mapeos lineales

Un mapeo lineal es realizado por una función de variable compleja de la forma

$$w = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Caso 1: Si  $\alpha = 0$  entonces  $w = \beta$ , lo que implica que todo el plano  $z$  es mapeado a un solo punto  $\beta$ . Nótese que entonces  $\beta$  es un punto fijo de  $w = \beta$ , que a su vez no tiene mapeo inverso (figura 2.7). A este caso en el que todo el plano  $z$  se proyecta a un solo punto de  $b$  se le denomina mapeo *degenerado*.

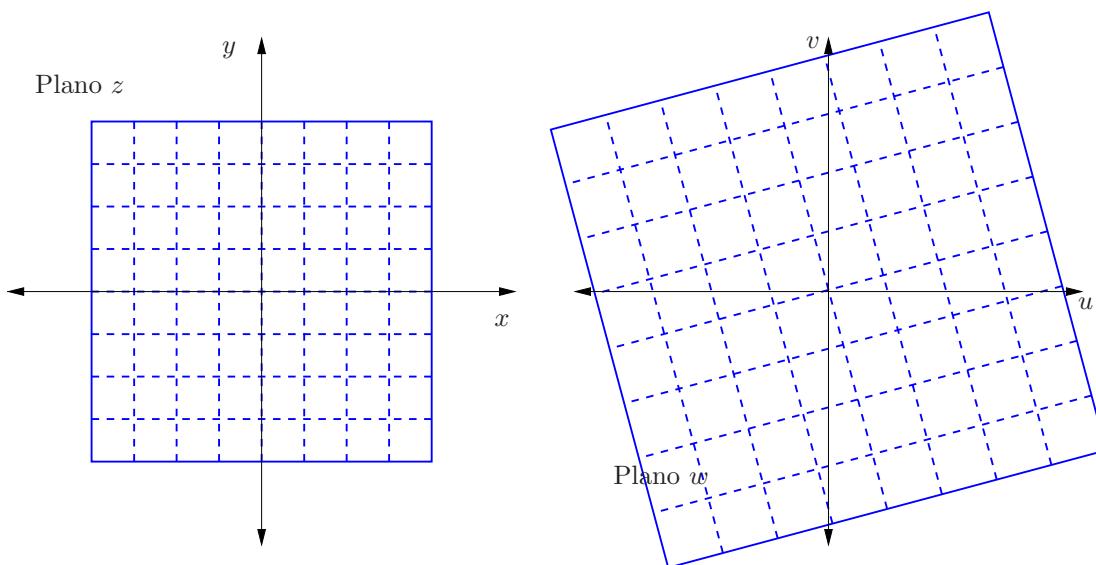


**Figura 2.7:** Mapeo de todo el plano  $z$  a  $\beta$  con  $w = \beta$ .

Caso 2: Si  $\beta = 0$  y  $\alpha \neq 0$  entonces  $w = \alpha z$ , lo que equivale a decir que 0 es un punto fijo y el mapeo inverso es  $z = \frac{1}{\alpha}w$ . Si se utiliza la notación polar  $z = re^{j\theta}$  y  $\alpha = |\alpha|e^{j\angle\alpha}$  entonces

$$w = \alpha z = |\alpha|e^{j\angle\alpha}re^{j\theta} = |\alpha|re^{j(\theta+\angle\alpha)}$$

esto implica que  $|w| = |\alpha|r$  y  $\angle w = \theta + \angle\alpha$ . En otras palabras, el mapeo  $w = \alpha z$  equivale a una expansión (ampliación o magnificación del plano  $z$ ) por un factor  $|\alpha|$  y una rotación por el ángulo  $\angle\alpha$  (figura 2.8).



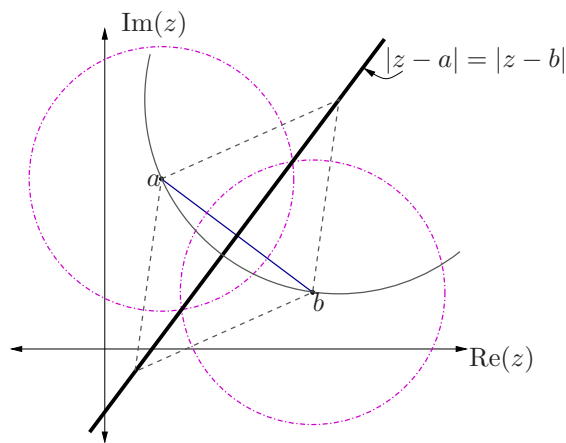
**Figura 2.8:** Rotación y escalado por el mapeo  $w = \alpha z$ .

Caso 3: Si  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ , entonces  $w = \alpha z + \beta$  se puede considerar como dos mapeos en cascada. Primero  $\zeta = \alpha z$  y luego  $w = \zeta + \beta$ . Se observa entonces que sumar una constante  $\beta$  a un punto  $\zeta$  equivale a una traslación hacia  $\beta + \zeta$ . Así, el mapeo lineal amplifica, rota y traslada los puntos de  $z$  en  $w$ .

**Ejemplo 2.2** Demuestre que el mapeo lineal  $w = \alpha z + \beta$  transforma una recta en  $z$  en otra recta en  $w$ .

**Solución:** Cualquier recta en  $z$  puede describirse por medio de la ecuación

$$|z - a| = |z - b| \quad (2.16)$$



**Figura 2.9:** Construcción geométrica de una recta con  $|z - a| = |z - b|$ . Puesto que  $|z - a|$  es la distancia entre  $z$  y  $a$ , un círculo centrado en un punto  $z$  sobre la recta descrita tendrá que pasar por ambos puntos  $a$  y  $b$ . Además, dos círculos del mismo radio centrados en  $a$  y  $b$  deberán intersectarse sobre la recta  $|z - a| = |z - b|$ . Así, la recta en cuestión es la mediatriz del segmento  $ab$ , es decir, la recta perpendicular al segmento  $ab$  que corta a éste por su mitad.

donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y la recta es la *mediatriz* del segmento de recta entre  $a$  y  $b$  (figura 2.9). Puesto que  $w = \alpha z + \beta$  entonces

$$z = \frac{w - \beta}{\alpha} \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{w - \beta}{\alpha} - a \right| &= \left| \frac{w - \beta}{\alpha} - b \right| \\ \frac{1}{|\alpha|} |w - (\alpha a + \beta)| &= \frac{1}{|\alpha|} |w - (\alpha b + \beta)| \\ |w - \bar{a}| &= |w - \bar{b}| \end{aligned}$$

donde  $\bar{a} = \alpha a + \beta$  y  $\bar{b} = \alpha b + \beta$  que son las transformaciones de los dos puntos generadores de la recta. Con esto queda claro que la proyección de la recta es otra recta.

Otra posible demostración se esboza a continuación. Asíumase como dominio la recta  $y = mx + b$ . Se cumple

$$w = \alpha z + \beta = \alpha(x + jy) + \beta = (\alpha x + \beta) + j\alpha y = u + jv$$

Puesto que  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , no es posible igualar  $\alpha x + \beta = u$ , pues el lado izquierdo no es real. Utilizando  $\alpha = \alpha_{\text{Re}} + j\alpha_{\text{Im}}$  y  $\beta = \beta_{\text{Re}} + j\beta_{\text{Im}}$  se pueden obtener y agrupar las partes reales e imaginarias y demostrar que

$$v = K_1 u + K_2$$

lo que también representa una recta, donde las constantes se definen como

$$K_1 = \frac{\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}$$

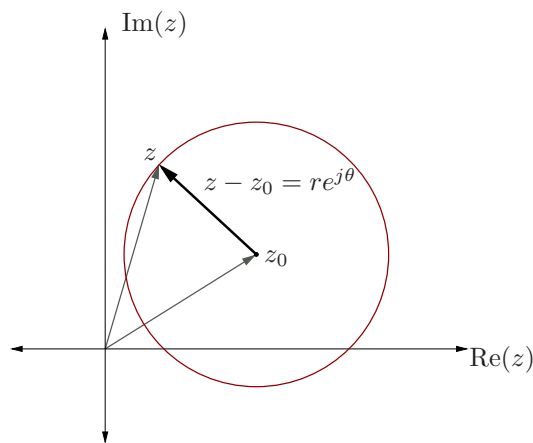
$$K_2 = \frac{\alpha_{\text{Im}}b - \beta_{\text{Re}}}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}(\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m) + \alpha_{\text{Re}}b + \beta_{\text{Im}} \quad .$$

2.2

**Ejemplo 2.3** Demuestre que el mapeo lineal transforma un círculo en  $z$  en otro círculo en  $w$ .

**Solución:** La ecuación de un círculo en  $z$  es  $|z - z_0| = r$ , donde el círculo tiene radio  $r$  y está centrado en  $z_0$  (figura 2.10). El mapeo lineal es  $w = \alpha z + \beta$ . Esto quiere decir que

$$\frac{w - \beta}{\alpha} = z$$



**Figura 2.10:** Construcción geométrica para representación de un círculo centrado en  $z_0$  y de radio  $r$  como  $|z - z_0| = r$ .

Si se resta  $z_0$  a ambos lados se obtiene

$$z - z_0 = \frac{w - \beta}{\alpha} - z_0 = \frac{w}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} - z_0 = \frac{w}{\alpha} - \frac{\beta + \alpha z_0}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha} (w - w_0)$$

con  $w_0 = \beta + \alpha z_0$ . Puesto que el círculo en  $z$  es  $|z - z_0| = r$  esto implica que

$$\left| \frac{1}{\alpha}(w - w_0) \right| = r \Rightarrow |w - w_0| = r|\alpha|$$

En otras palabras, el radio del círculo en el plano  $w$  ha sido escalado con un factor  $|\alpha|$  y está centrado en  $w_0 = \alpha z_0 + \beta$ , que corresponde a la aplicación del mapeo lineal al centro del círculo  $z_0$ . 2.3

Si una curva corta al plano  $z$  en dos, entonces una curva mapeada linealmente al plano  $w$  también corta al último en dos, donde los puntos en un lado de la curva en  $z$  se proyectan a solo un lado de la curva en  $w$ .

**Ejemplo 2.4** Considérese el mapeo lineal  $w = f(z) = \alpha z + \beta$ . Si  $1 + j = f(1 + j)$  y  $0 = f(j)$

1. Determine los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .
2. Encuentre la región del plano  $w$  a la que es mapeado el semiplano izquierdo del plano  $z$ .
3. Encuentre la región en el plano  $w$  correspondiente a  $|z| < 2$ .
4. Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Solución:** Con los dos pares de puntos dados se plantea un sistema de dos ecuaciones lineales

$$\alpha(1 + j) + \beta = 1 + j \tag{2.18}$$

$$\alpha j + \beta = 0 \tag{2.19}$$

De (2.19) se despeja  $\beta = -j\alpha$  lo que se introduce en (2.18) para despejar  $\alpha$ :

$$\alpha(1 + j) - j\alpha = 1 + j$$

$$\alpha = 1 + j$$

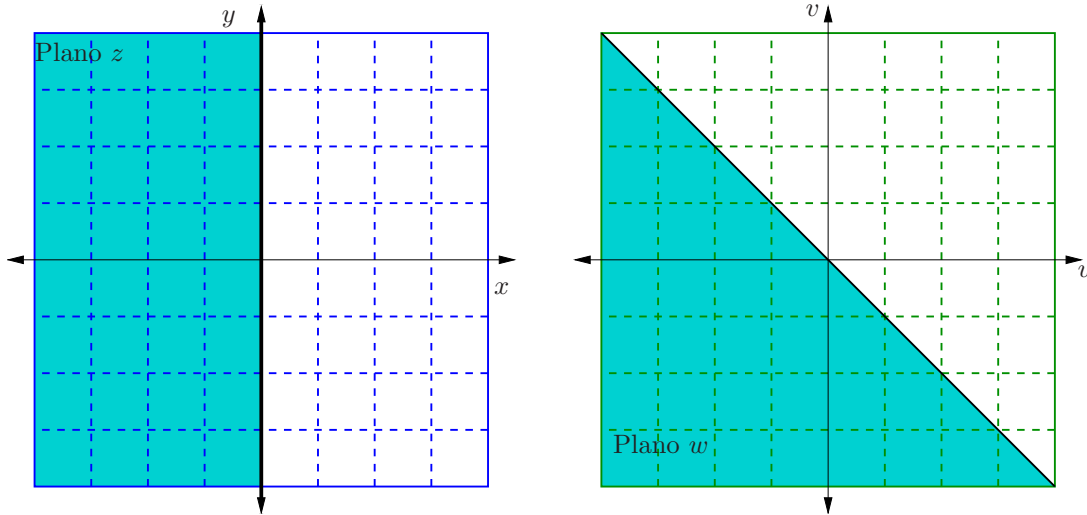
con lo que se deriva además  $\beta = 1 - j$ .

Como el mapeo es lineal, el eje imaginario del plano  $z$  es transformado a otra recta del plano  $w = u + jv$ . Puesto que el eje imaginario es la recta  $z = jy$ , se sustituye esto en el mapeo, lo que resulta en:

$$\begin{aligned} w &= (1 + j)jy + (1 - j) \\ &= jy - y + 1 - j \\ &= \underbrace{(1 - y)}_u + j\underbrace{(y - 1)}_v \end{aligned}$$

Despejando  $y$  en términos de  $u$  e insertando en  $v$  se obtiene  $v = -u$ . Para encontrar qué parte del plano  $w$  dividido por  $v = -u$  corresponde al semiplano izquierdo de  $z$  se puede proceder tomando un punto de ese semiplano y encontrando su proyección en  $w$ .

Por ejemplo, el punto  $z = -1$  es transformado en  $w = -(1 + j) + (1 - j) = -2j$ , lo que quiere decir que  $\text{Re}\{z\} < 0$  es transformado en el semiplano inferior izquierdo  $v < -u$ . A la misma conclusión se puede llegar utilizando la interpretación geométrica del mapeo: puesto que  $\alpha = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$  el semiplano se escala por  $\sqrt{2}$  y luego se rota  $45^\circ$  en contra de las manecillas del reloj, para ser luego trasladado en  $\beta = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ , que deja al semiplano izquierdo de  $z$  del lado inferior izquierdo de  $w$  (figura 2.11).



**Figura 2.11:** Ejemplo de mapeo lineal

Como el mapeo es lineal, el círculo es transformado en otro círculo. Siguiendo la interpretación geométrica el nuevo círculo tendrá un radio  $2\sqrt{2}$  centrado en  $w_0 = 1 - j$ , es decir, el círculo  $|z| < 2$  es transformado en  $|w - w_0| < 2\sqrt{2}$ .

Como punto fijo se tiene que  $z = \alpha z + \beta$  que tiene una sola solución  $z = w = 1 + j$  (ver el enunciado). 2.4

### 2.2.3 Mapeo de Inversión

El mapeo de inversión tiene la forma general:

$$w = \frac{1}{z}$$

Interesa analizar ahora cómo se transforman los círculos y rectas del plano  $z$  en este caso. Para ello, obsérvese primero el caso del círculo

$$|z - z_0| = \left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r \quad .$$

Utilizando las propiedades de los números complejos se derivan las siguientes conclusiones:

$$\left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r$$

$$\left| \frac{1}{w} \frac{w^*}{w^*} - z_0 \right| = r$$

y puesto que  $z z^* = |z|^2$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{w^*}{|w|^2} - z_0 \right) \left( \frac{w^*}{|w|^2} - z_0 \right)^* &= r^2 \\
 \left( \frac{w^*}{|w|^2} - z_0 \right) \left( \frac{w}{|w|^2} - z_0^* \right) &= r^2 \\
 \frac{1}{|w|^2} - \frac{wz_0}{|w|^2} - \frac{w^*z_0^*}{|w|^2} + |z_0|^2 &= r^2 \\
 1 - (wz_0 + w^*z_0^*) &= \underbrace{(r^2 - |z_0|^2)}_{\alpha = \text{cte} \in \mathbb{R}} |w|^2 \\
 ww^* + \frac{wz_0 + w^*z_0^*}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Asúmase por ahora que  $\alpha \neq 0$ . Sumando a ambos lados de la igualdad  $\frac{z_0 z_0^*}{\alpha^2}$  para completar cuadrados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 ww^* + \frac{wz_0 + w^*z_0^*}{\alpha} + \frac{z_0 z_0^*}{\alpha^2} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{z_0 z_0^*}{\alpha^2} \\
 ww^* + \frac{wz_0}{\alpha} + \frac{w^*z_0^*}{\alpha} + \frac{z_0 z_0^*}{\alpha} \frac{1}{\alpha} &= \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w \left( w^* + \frac{z_0}{\alpha} \right) + \frac{z_0^*}{\alpha} \left( w^* + \frac{z_0}{\alpha} \right) &= \left( w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right) \left( w^* + \frac{z_0}{\alpha} \right) = \left( w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right) \left( w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right)^* \\
 &= \left| w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right|^2 = \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|w - w_0| = r_w$$

con  $w_0 = -z_0^*/\alpha$  y  $r_w = |r/\alpha| = |r/(r^2 - |z_0|^2)|$ . Entonces, si  $\alpha \neq 0$ , un círculo en el plano  $z$  es transformado por inversión en otro círculo en el plano  $w$ . Nótese que  $\alpha = 0$  equivale a decir  $r = |z_0|$ , es decir, un círculo que pasa por el origen. En otras palabras, cualquier círculo en el plano  $z$  que *no* pasa por el origen es transformado por  $w = \frac{1}{z}$  en otro círculo que tampoco pasa por el origen, pues si  $r \neq |z_0|$  entonces

$$r_w = \frac{|r|}{|\alpha|} \neq \left| -\frac{z_0^*}{\alpha} \right| = \frac{|z_0|}{|\alpha|}$$

Para el caso especial en el que el círculo en el plano  $z$  pasa por el origen, entonces  $\alpha$  es cero y la ecuación (2.20) se transforma en

$$1 - (wz_0 + w^*z_0^*) = 0$$

y considerando que  $w = u + jv$ ,  $z_0 = x_0 + jy_0$  y  $z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re}\{wz_0\} &= 1 \\
 2(ux_0 - vy_0) &= 1 \\
 v &= \frac{x_0}{y_0}u - \frac{1}{2y_0}
 \end{aligned}$$

lo que equivale a una recta en el plano  $w$  que corta el eje imaginario en  $v = -\frac{1}{2y_0}$  y tiene pendiente  $\frac{x_0}{y_0}$ .

De forma similar se procede ahora con el mapeo de inversión de una recta en el plano  $z$ . Para ello se utilizará ahora la ecuación de la recta de la siguiente forma:

$$|z - a| = |z - b|$$

donde  $a, b \in \mathbb{C}$ , que describe la recta perpendicular al segmento de recta entre  $a$  y  $b$ , que corta a este último a la mitad (mediatriz). Sustituyendo  $z = 1/w$  y elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{w} - a \right| &= \left| \frac{1}{w} - b \right| \\ \left| \frac{w^*}{|w|^2} - a \right|^2 &= \left| \frac{w^*}{|w|^2} - b \right|^2 \\ \left( \frac{w^*}{|w|^2} - a \right) \left( \frac{w}{|w|^2} - a^* \right) &= \left( \frac{w^*}{|w|^2} - b \right) \left( \frac{w}{|w|^2} - b^* \right) \end{aligned}$$

de donde se puede despejar

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{|w|^2}(a - b)^* + \frac{w}{|w|^2}(a - b) &= |a|^2 - |b|^2 \\ w^*(a - b)^* + w(a - b) &= \underbrace{(|a|^2 - |b|^2)}_{\beta = \text{cte} \in \mathbb{R}} |w|^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nótese que la constante  $\beta$  es igual a cero si y solo si los dos puntos  $a$  y  $b$  tienen la misma magnitud, en cuyo caso la mediatriz es una recta que pasa por el origen. En este caso, la ecuación anterior sería equivalente a

$$w^*(a - b)^* + w(a - b) = 0$$

y utilizando  $z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}$ ,  $w = u + jv$  se obtiene como parte real del producto entre  $w$  y  $(a - b)$

$$2u \operatorname{Re}\{a - b\} - 2v \operatorname{Im}\{a - b\} = 0$$

de donde se deriva

$$v = \frac{\operatorname{Re}\{a - b\}}{\operatorname{Im}\{a - b\}} u$$

lo que corresponde a una recta en el plano  $w$  que pasa por el origen. En otras palabras, una recta que pasa por el origen en  $z$  será proyectada en otra recta que pasa por el origen en  $w$ .

Si  $\beta \neq 0$  entonces la recta no pasa por el origen y la ecuación (2.21) se puede reescribir

$$w^* \frac{(a - b)^*}{\beta} + w \frac{(a - b)}{\beta} = |w|^2 = ww^*$$



Reagrupando los términos y completando los cuadrados sumando  $(a-b)(a-b)^*/\beta^2$  se obtiene

$$ww^* - w^* \frac{(a-b)^*}{\beta} - w \frac{(a-b)}{\beta} + \frac{(a-b)(a-b)^*}{\beta^2} = \frac{(a-b)(a-b)^*}{\beta^2}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} w \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right) - \frac{(a-b)^*}{\beta} \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right) &= \frac{|a-b|^2}{\beta^2} \\ \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right) \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right)^* &= \left( \frac{|a-b|}{\beta} \right)^2 \\ \left| w - \frac{(a-b)^*}{\beta} \right| &= \frac{|a-b|}{|\beta|} \end{aligned}$$

Esto corresponde a un círculo centrado en  $w_0 = \frac{(a-b)^*}{\beta}$  de radio  $r_w = \left| \frac{a-b}{\beta} \right|$ . Puesto que  $r_w = |w_0|$  entonces la recta es transformada en un círculo que pasa por el origen del plano  $w$ .

En resumen, el mapeo de inversión transforma los círculos y rectas en círculos o rectas. Puesto que  $w = 1/z$ , es fácil de recordar que si  $z$  tiende a cero, entonces  $w$  tenderá a infinito, el cual es contenido en rectas del plano  $w$ . Si  $z$  nunca se hace cero (como por ejemplo, en círculos que no pasan por el origen), entonces su transformación siempre tendrá valores finitos en  $w$ . Si  $z$  se hace infinito, entonces el valor de  $w = 1/z$  será cero, por lo que toda recta en el plano  $z$  (por contener al infinito) tendrá una imagen que pasa por el origen del plano  $w$ .

Los puntos fijos de este mapeo se encuentran resolviendo  $z = 1/z$ , lo que equivale a  $z^2 = 1$ . Esto tiene dos posibles valores en  $z = \pm 1$ . Además cualquier círculo centrado en el origen de  $z$  de radio  $r$  será transformado en otro círculo centrado en el origen de  $w$  con radio  $1/r$ . Esto quiere decir que el interior del círculo unitario en  $z$  se proyecta al exterior del círculo unitario en  $w$ . Nótese que el círculo unitario  $|z| = 1$  contiene a los dos puntos fijos, que se deben encontrar entonces en su proyección. Nótese además que el mapeo inverso de  $w = 1/z$  es  $z = 1/w$ , es decir, el mapeo inverso de la inversión es a su vez la inversión.

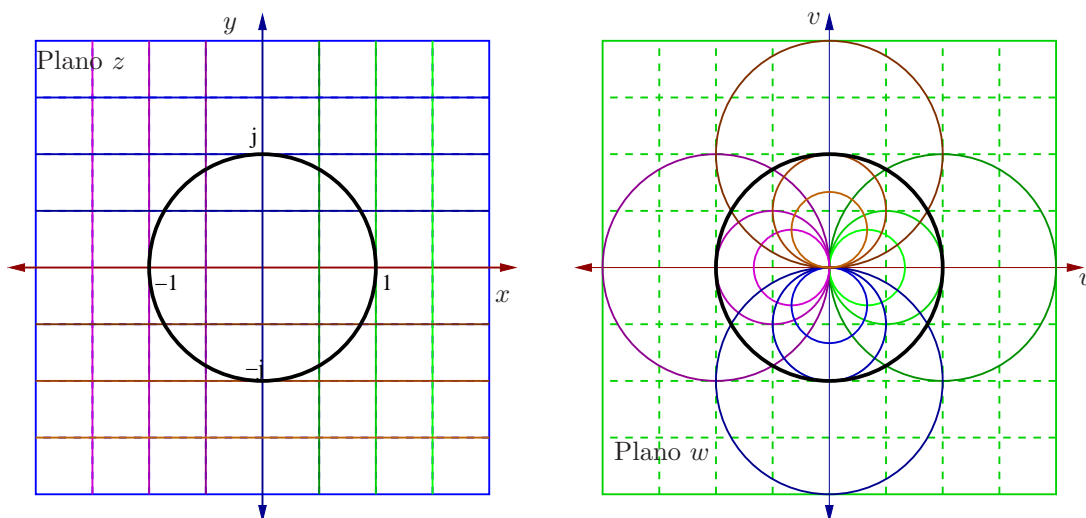
Se deja como ejercicio para el lector mostrar que el mapeo de inversión transforma círculos centrados en el eje real del plano  $z$  en círculos centrados en el eje real del plano  $w$  o en rectas verticales; además, transforma círculos centrados en el eje imaginario del plano  $z$  en círculos centrados en el eje imaginario del plano  $w$ , o en rectas horizontales.

La figura 2.12 ilustra el resultado del mapeo de inversión para el círculo unitario, líneas verticales y horizontales en el plano  $z$ .

## 2.2.4 Mapeo bilineal

Se le denomina polinomio bilineal de  $z$  y  $w$  a la expresión de la forma

$$\alpha_1 zw + \alpha_2 z + \alpha_3 w + \alpha_4 = 0$$



**Figura 2.12:** Mapeo de inversión de líneas horizontales y verticales. El eje imaginario  $\text{Im}(z) = 0$  corresponde con  $\text{Im}(w) = 0$ , y de forma equivalente el eje real  $\text{Re}(z) = 0$  equivale a  $\text{Re}(w) = 0$ . Las otras rectas corresponden con círculos, todos pasando por el origen del plano  $w$ . El círculo unitario es su propia imagen.

con las constantes complejas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ , puesto que si se considera a una de las variables  $z$  o  $w$  constante, la expresión resultante es lineal. Esta ecuación puede reescribirse como:

$$w(\alpha_1 z + \alpha_3) = -\alpha_2 z - \alpha_4$$

$$w = \frac{-\alpha_2 z - \alpha_4}{\alpha_1 z + \alpha_3}$$

Si se definen  $a = -\alpha_2$ ,  $b = -\alpha_4$ ,  $c = \alpha_1$  y  $d = \alpha_3$  se obtiene la forma más usual para un mapeo bilineal:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.22)$$

Nótese que el mapeo lineal visto anteriormente (sección 2.2.2) es un caso especial del mapeo bilineal con  $c = 0$  y  $d = 1$ , y el mapeo de inversión (sección 2.2.3) es otro caso especial con  $a = d = 0$  y  $b = c = 1$ .

El mapeo (2.22) se puede transformar en una secuencia de mapeos ya analizados para derivar sus propiedades. Multiplíquese para ello el término  $az$  por  $c/c$  y súmese  $ad/c - ad/c$ :

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \quad (2.23)$$

donde la variable  $z$  aparece ahora una sola vez en el denominador del segundo término.

De la última expresión se nota que si el término  $(bc - ad)$  (denominado *determinante del mapeo*) es cero, entonces el mapeo degenera en  $w = \frac{a}{c}$  y por lo tanto no tiene mapeo inverso. Si el determinante del mapeo es diferente de cero, entonces su mapeo inverso

existe y está dado por el mapeo también bilineal e invertible (ver problema 2.30):

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (2.24)$$

Para apreciar mejor los pasos involucrados de este mapeo, (2.23) se puede reescribir con  $\lambda = a/c$ ,  $\mu = bc - ad$ ,  $\alpha = c^2$  y  $\beta = cd$ :

$$w = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta}$$

lo que equivale a los siguientes tres pasos

1.  $z_1 = \alpha z + \beta$  (mapeo lineal)
2.  $z_2 = \frac{1}{z_1}$  (mapeo de inversión)
3.  $w = \mu z_2 + \lambda$  (mapeo lineal)

El primer mapeo lineal escala, rota y traslada el plano  $z$ , por lo que si el dominio del mapeo es una curva, su forma no cambiará en el plano  $z_1$ : rectas se transformarán en rectas, y círculos en círculos. El segundo mapeo, de inversión, transformará círculos y rectas en círculos y rectas, que a su vez serán escalados, rotados y trasladados por el último paso a su posición final. En otros términos, el mapeo bilineal también transforma círculos y rectas en  $z$  en círculos y rectas en  $w$ .

**Ejemplo 2.5** En el estudio de líneas de transmisión se utiliza a menudo la llamada *carta de Smith* que relaciona el coeficiente complejo de reflexión  $\Gamma$  con la impedancia compleja normalizada  $z$  por medio del mapeo bilineal:

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.25)$$

Verifique a qué equivalen las proyecciones de resistencia o reactancias normalizadas constantes en  $z$  en el plano  $\Gamma$  del coeficiente complejo de reflexión.

**Solución:** Una primera solución conceptual puede obtenerse observando que los dos mapeos lineales involucrados en la ecuación (2.25) son relativamente sencillos:

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} = 1 - \frac{2}{z + 1}$$

El primer mapeo  $z_1 = z + 1$  en el denominador del término racional corresponde a trasladar al plano  $z$  una unidad hacia la derecha. Luego se aplica el mapeo de inversión  $z_2 = 1/z_1$  y, puesto que  $-2 = 2e^{j180^\circ}$ , se hace un escalado por el factor de 2 seguido por una rotación en  $180^\circ$ . Al resultado  $z_2$  solo resta desplazarlo una unidad hacia la derecha para obtener  $\Gamma$ .

Nótese que en  $z = \infty$ ,  $\Gamma = 1$ , esto quiere decir que toda recta en  $z$  tendrá un mapeo que pasa por el punto  $\Gamma = 1$  pues toda recta contiene a  $\infty$ . Además, en  $z = -1$ ,  $\Gamma = \infty$ , por lo que, considerando todo el análisis anterior para el mapeo de inversión, cualquier círculo

o recta que pase por  $z = -1$  será transformado en una recta en el plano  $\Gamma$ . Consecuencia de lo anterior es que toda recta que no pasa por  $z = -1$  tiene como equivalente un círculo que pasa por  $\Gamma = 1$ .

Para un análisis más algebraico de la expresión (2.25) considérese primero la ecuación general de una línea:

$$|z - a| = |z - b| \quad (2.26)$$

Partiendo del hecho de que el mapeo inverso de (2.25) tiene la forma

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

y elevando ambos lados de (2.26) al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} - a \right|^2 &= \left| \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} - b \right|^2 \\ |(1 + \Gamma) - a(1 - \Gamma)|^2 &= |(1 + \Gamma) - b(1 - \Gamma)|^2 \\ \underbrace{|\Gamma(1 + a) + (1 - a)|^2}_{a_1} &= \underbrace{|\Gamma(1 + b) + (1 - b)|^2}_{b_1} \end{aligned}$$

Nótese que los términos  $a_1, a_2, b_1, b_2$  son números complejos, introducidos para simplificar la notación. Utilizando la propiedad  $|z|^2 = zz^*$

$$\begin{aligned} |a_1\Gamma + a_2|^2 &= |b_1\Gamma + b_2|^2 \\ (a_1\Gamma + a_2)(a_1\Gamma + a_2)^* &= (b_1\Gamma + b_2)(b_1\Gamma + b_2)^* \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior y asumiendo  $\alpha \neq 0$  se obtiene:

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 \underbrace{(|a_1|^2 - |b_1|^2)}_{\alpha \in \mathbb{R}} + \Gamma \underbrace{(a_1 a_2^* - b_1 b_2^*)}_{\kappa} + \Gamma^* \underbrace{(a_1^* a_2 - b_1^* b_2)}_{\kappa^*} &= \underbrace{|b_2|^2 - |a_2|^2}_{\beta \in \mathbb{R}} \\ |\Gamma|^2 + \Gamma \frac{\kappa}{\alpha} + \Gamma^* \frac{\kappa^*}{\alpha} &= \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Completando cuadrados con  $\frac{\kappa\kappa^*}{\alpha^2}$

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 + \Gamma \frac{\kappa}{\alpha} + \Gamma^* \frac{\kappa^*}{\alpha} + \frac{\kappa\kappa^*}{\alpha^2} &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\kappa\kappa^*}{\alpha^2} \\ \left( \Gamma + \frac{\kappa^*}{\alpha} \right) \left( \Gamma + \frac{\kappa^*}{\alpha} \right)^* &= \frac{\alpha\beta + \kappa\kappa^*}{\alpha^2} \\ \left| \Gamma + \frac{\kappa^*}{\alpha} \right|^2 &= \frac{\alpha\beta + \kappa\kappa^*}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Lo que representa, como se esperaba, círculos en el plano  $\Gamma$ , centrados en  $-\frac{\kappa^*}{\alpha}$  y de radio  $\sqrt{\frac{\alpha\beta + \kappa\kappa^*}{\alpha^2}}$ . Como caso de interés se estudia ahora la proyección de las rectas horizontales y verticales en el plano  $z$  sobre el plano  $\Gamma$ . Una recta horizontal que cruza el eje imaginario en  $y$  ( $y \in \mathbb{R}$ ) puede representarse por ejemplo con la ecuación (2.26) donde

$$\begin{aligned} a = j(y - 1) &\Rightarrow a_1 = 1 + j(y - 1), \quad a_2 = 1 - j(y - 1) \\ b = j(y + 1) &\Rightarrow b_1 = 1 + j(y + 1), \quad b_2 = 1 - j(y + 1) \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
 \kappa^* &= a_1^* a_2 - b_1^* b_2 \\
 &= (1 - j(y - 1))(1 - j(y - 1)) - (1 - j(y + 1))(1 - j(y + 1)) \\
 &= 1 - j2(y - 1) - (y - 1)^2 - [1 - j2(y + 1) - (y + 1)^2] \\
 &= 4y + 4j \\
 \alpha &= |a_1|^2 - |b_1|^2 = -4y \\
 \beta &= |b_2|^2 - |a_2|^2 = 4y = -\alpha
 \end{aligned}$$

con lo que se puede derivar que la ecuación del círculo equivalente está dada por:

$$\left| \Gamma - \left( 1 + j \frac{1}{y} \right) \right|^2 = \frac{1}{y^2}$$

lo que confirma la observación anterior de que todo círculo representando a una recta en  $z$  pasará por el punto  $\Gamma = 1$ , puesto que el radio es igual a la separación entre el centro del círculo y el punto  $\Gamma = 1$ .

Para las rectas verticales de forma similar se obtiene:

$$\begin{aligned}
 a = x - 1 &\Rightarrow a_1 = x, & a_2 = 2 - x \\
 b = x + 1 &\Rightarrow b_1 = 2 + x, & b_2 = -x
 \end{aligned}$$

con lo que se deriva

$$\begin{aligned}
 \kappa^* &= a_1^* a_2 - b_1^* b_2 = 4x \\
 \alpha &= |a_1|^2 - |b_1|^2 = -4x - 4 \\
 \beta &= |b_2|^2 - |a_2|^2 = 4x - 4
 \end{aligned}$$

y se puede expresar entonces

$$\left| \Gamma - \left( 1 - \frac{1}{x + 1} \right) \right|^2 = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Nótese que el centro de este círculo está alejado de  $\Gamma = 1$  la misma distancia que su radio, por lo que también pasa por  $\Gamma = 1$ . El eje imaginario del plano  $z$  es mapeado al círculo unitario del plano  $\Gamma$ .

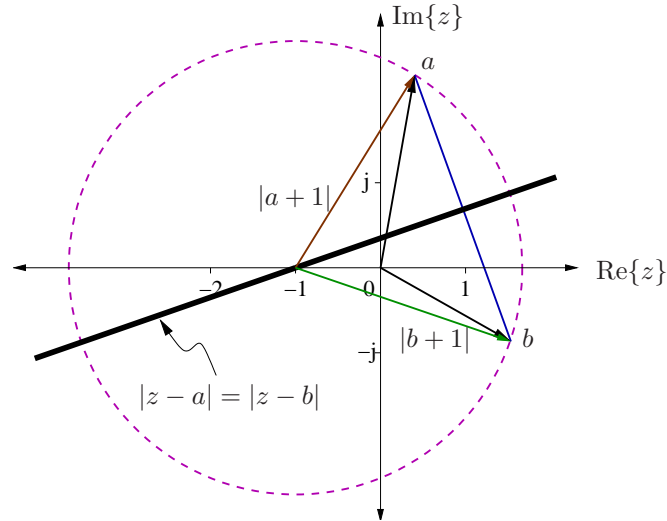
Falta por analizar el caso  $\alpha = 0$ . Esto implica que

$$\begin{aligned}
 |a_1|^2 - |b_1|^2 &= 0 \Rightarrow \\
 |a_1|^2 &= |b_1|^2 \\
 |1 + a|^2 &= |1 + b|^2
 \end{aligned}$$

Considerando que la expresión  $|z - z_0|$  se puede interpretar como la distancia entre los puntos  $z$  y  $z_0$ , entonces, reorganizando la expresión anterior como

$$|a - (-1)| = |b - (-1)|$$

se obtiene que la distancia del punto  $a$  hacia  $-1$  debe ser igual que la distancia del punto  $b$  a  $-1$ , o en otros términos, ambos puntos  $a$  y  $b$  deben estar sobre un círculo con centro en  $-1$ , lo que se ilustra en la figura 2.13. Puesto que la mediatriz de dos puntos situados sobre un círculo pasa por el centro de dicho círculo, la ecuación  $|z - a| = |z - b|$  con  $|a + 1| = |b + 1|$  describe entonces una línea recta que pasa por el punto  $-1$  del plano  $z$ . A



**Figura 2.13:** Demostración gráfica que  $|z - a| = |z - b|$  con  $|a + 1| = |b + 1|$  describe una recta que pasa por  $z = -1$ .

partir de esta observación se puede utilizar entonces una representación paramétrica del eje real de  $z$  y la recta vertical que pasa por  $-1$ , para obtener directamente a través de la expresión del mapeo las representaciones correspondientes. Primero, el eje real se puede expresar como  $z = t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Esto produce

$$\Gamma = \frac{t - 1}{t + 1}$$

que es siempre real, y por tanto representa al eje real del plano  $\Gamma$ , tendiendo a 1 para  $t \rightarrow \pm\infty$ , haciéndose cero para  $t = 1$ , y  $\pm\infty$  si  $t$  se acerca a  $-1$  por la izquierda o por la derecha.

La recta vertical que pasa por  $z = -1$  se puede representar como  $z = -1 + jt$  con lo que se obtiene

$$\Gamma = \frac{(-1 + jt) - 1}{(-1 + jt) + 1} = 1 + j\frac{2}{t}$$

que es una recta vertical que pasa por el punto  $\Gamma = 1$  al variar con  $t$  solo la parte imaginaria.

La figura 2.14 presenta en forma gráfica los resultados descritos hasta el momento. La Carta de Smith comúnmente representa solo lo que se encuentra dentro del círculo unitario del plano  $\Gamma$ , puesto que componentes resistivos negativos de la impedancia normalizada  $z$  no tienen sentido en la aplicación práctica. Nótese la similitud con el mapeo de inversión de rectas verticales y horizontales en la figura 2.12.

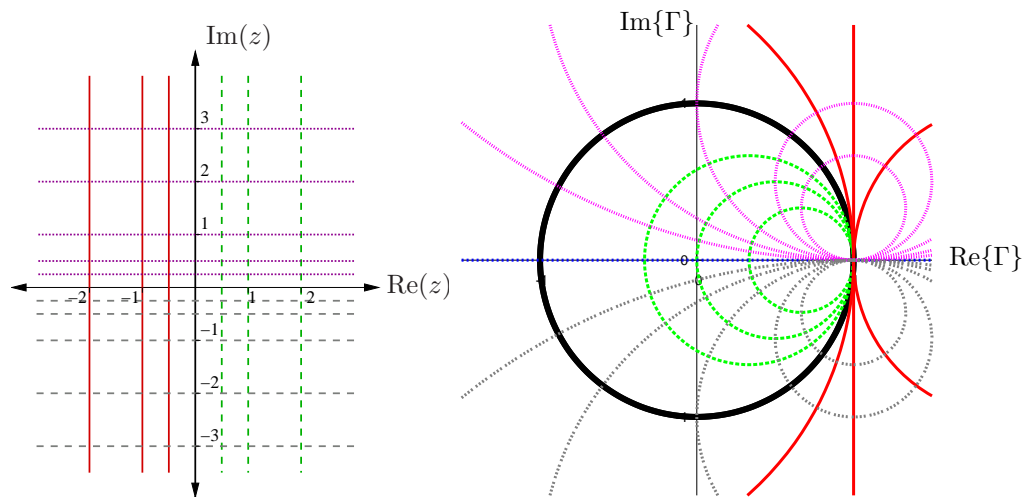


Figura 2.14: Mapeo bilineal utilizando en la Carta de Smith.

## 2.2.5 Otros mapeos

Existen otra gran variedad de mapeos, como por ejemplo

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios en  $z$ , mapeo que se utiliza fuertemente en las transformadas de Laplace y  $z$ . La figura 2.15 muestra el resultado de mapear las líneas verticales, horizontales y círculos mostrados, utilizando los mapeos  $w = \text{Ln}(z)$ ,  $w = \text{sen}(z)$  y  $w = \text{cos}(z)$ .

El mapeo

$$w = ae^{bz}$$

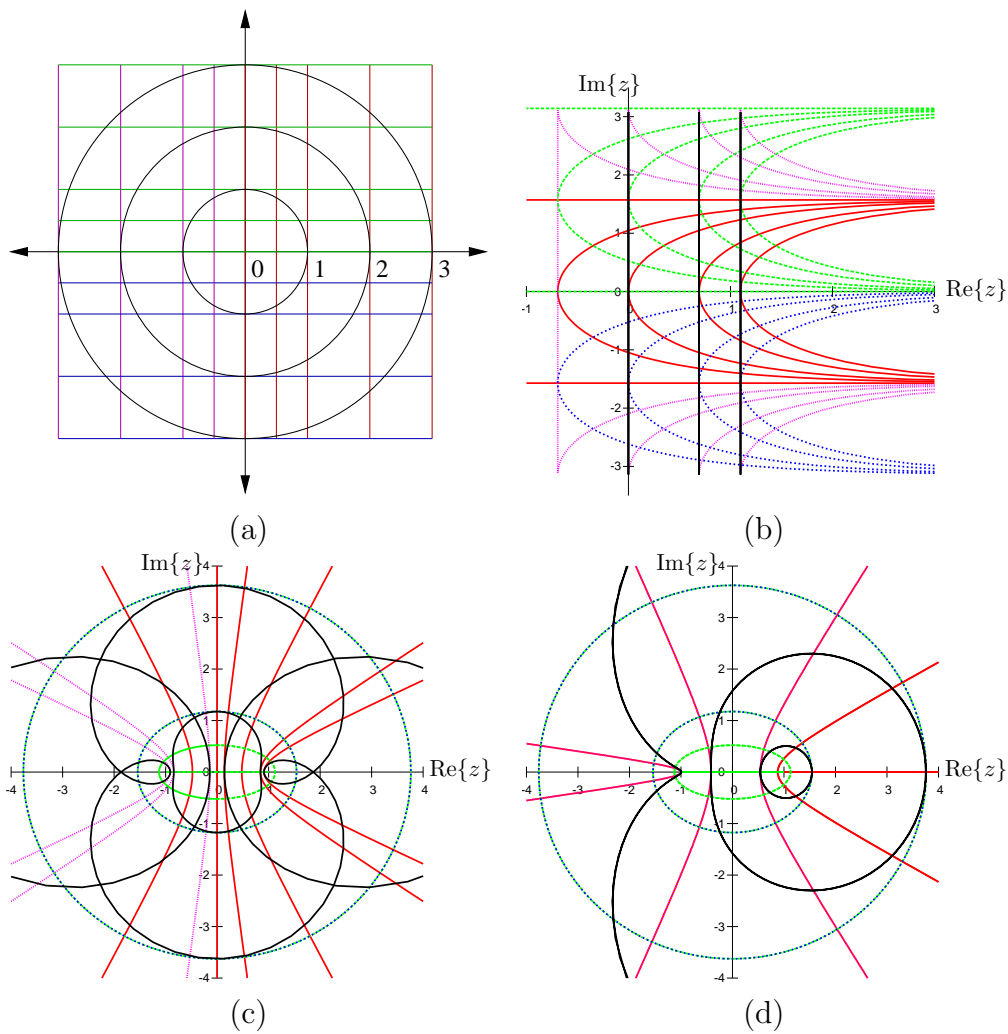
se estudiarán con más detalle en capítulos posteriores. El lector interesado puede revisar [18], donde encontrará muchos otros tipos de mapeos y sus aplicaciones en ingeniería.

## 2.3 Derivación compleja

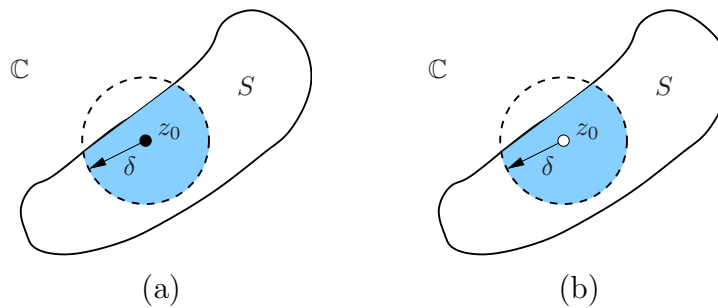
### 2.3.1 Algunas definiciones fundamentales

Los conjuntos de puntos del plano complejo pueden caracterizarse de acuerdo a sus características topológicas:

- Una **vecindad** de radio  $\delta$  (o simplemente *vecindad*  $\delta$ ) de un punto  $z_0$  en un conjunto de puntos  $S$  es el conjunto de todos los puntos  $z \in S$  tales que  $|z - z_0| < \delta$ , donde  $\delta$  es cualquier número real positivo (figura 2.16a).
- La **vecindad reducida** de radio  $\delta$  del punto  $z_0$  es igual a la vecindad de radio  $\delta$  de  $z_0$  excluyendo al punto  $z_0$ , es decir, el conjunto de puntos  $z$  para los que se cumple  $0 < |z - z_0| < \delta$  (figura 2.16b).



**Figura 2.15:** Efectos de mapear las líneas y círculos en (a) utilizando los mapeos (b)  $w = \text{Ln}(z)$ , (c)  $w = \text{sen}(z)$  y (d)  $w = \text{cos}(z)$ .



**Figura 2.16:** Diagramas para aclarar los conceptos de (a) Vecindad y (b) Vecindad reducida.

- Un punto  $z_0$  se llama **punto límite** o **punto de acumulación** de un conjunto  $S \subseteq \mathbb{C}$  si toda vecindad reducida de radio  $\delta$  de  $z_0$  contiene puntos de  $S$ . Un punto límite puede interpretarse entonces como aquel punto de  $S$  al que es posible acercarse arbitrariamente utilizando solo otros puntos de  $S$ . Esto quiere decir que, puesto que  $\delta$  es cualquier número positivo, el conjunto  $S$  tiene cardinalidad infinita.



Nótese además que el punto límite  $z_0$  no necesariamente debe pertenecer a  $S$ .

- Un conjunto  $S$  se dice **cerrado** si cada punto límite de  $S$  pertenece a  $S$ . Por ejemplo, el conjunto  $|z| \leq 1$  es cerrado mientras que  $|z| < 1$  no lo es.
- Un conjunto  $S$  se denomina **acotado** si existe una constante  $M \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $z \in S$  se cumple  $|z| < M$ .
- Un conjunto  $S$  se denomina **ilimitado** si no es acotado.
- Un conjunto **compacto** es cerrado y acotado.
- Un punto  $z_0$  se llama **punto interior** de un conjunto  $S$  si existe una vecindad de  $z_0$  cuyos puntos pertenecen completamente a  $S$ .
- Un punto  $z_0$  se llama **punto frontera** de un conjunto  $S$  si toda vecindad  $\delta$  de  $z_0$  contiene puntos que pertenecen a  $S$  y puntos que no le pertenecen.
- Un punto  $z_0$  se llama **punto exterior** de un conjunto  $S$  si no es punto interior o punto frontera. En otras palabras, un punto exterior de  $S$  no le pertenece a  $S$ .
- Un conjunto es **abierto** si contiene solamente puntos interiores. Nótese que si un conjunto es abierto, entonces no es cerrado y viceversa. El conjunto  $|z| < 1$  es abierto.
- Un conjunto  $S$  es **conexo** si cualquier par de puntos del conjunto pueden ser unidos por un camino formado por segmentos de recta contenidos en  $S$ .
- Un conjunto abierto y conexo recibe también el nombre de **región abierta** o **dominio**.
- Si a un conjunto  $S$  se le agregan todos los puntos límite de  $S$ , al nuevo conjunto se le denomina **clausura** de  $S$  y es un conjunto cerrado.
- La clausura de una región abierta o dominio se denomina **región cerrada**.
- Una **región** es una región abierta con ninguno, varios o todos sus puntos límite.

### 2.3.2 Límites y continuidad

Sea el plano complejo  $z = x + jy$ , el plano complejo  $w = u + jv$  (con  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ) y la función de variable compleja  $w = f(z)$  definida en un dominio  $S \subset \mathbb{C}$ . Sea además  $z_0$  un punto límite dentro de  $S$ . Se dice que  $l$  es el límite de  $f(z)$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$ , lo que se escribe

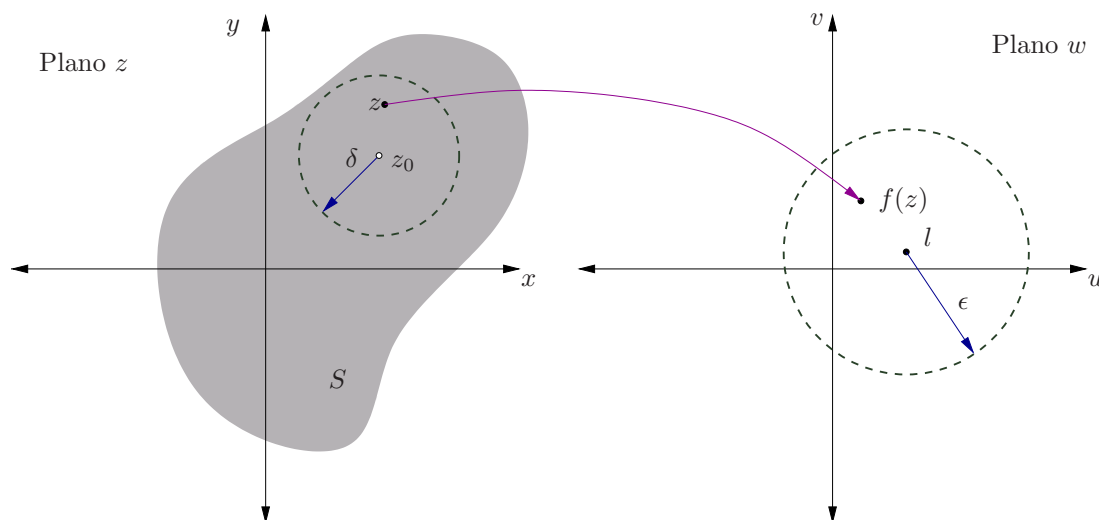
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad (2.28)$$

si los valores de  $f(z)$  se aproximan a  $l$  cuando  $z$  se aproxima a  $z_0$ ; es decir, si para todo  $\epsilon$  real positivo es posible encontrar un  $\delta$  real positivo tal que para todo  $z$  en una vecindad reducida de  $z_0$  de radio  $\delta$  se cumple

$$|f(z) - l| < \epsilon$$

que representa un disco de radio  $\epsilon$  en el plano  $w$  centrado en el valor del límite (figura 2.17). Expresado matemáticamente:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$



**Figura 2.17:** Representación gráfica del límite con variable compleja.

La función  $f(z)$  se denomina *continua* en el punto  $z = z_0$  si  $f(z_0)$  está definida y se cumple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) .$$

Puesto que  $z_0$  es un punto límite en el dominio  $S$  de definición de  $f(z)$ , entonces se concluye que  $f(z)$  está definida también en una vecindad de  $z_0$ . La función se denomina continua en un dominio, si es continua en todos los puntos de ese dominio.

### 2.3.3 Funciones diferenciables y analíticas

#### Definiciones

El número complejo  $A$  se denomina derivada de la función  $w = f(z)$  en el punto  $z_0$  relativo al conjunto  $S$  y se denota con  $f'_S(z_0)$  si se cumple

$$A = f'_S(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \quad (2.29)$$

Esta definición es muy similar a la derivada en caso de funciones de variable real:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

en cuyo caso el dominio  $S$  se ha reducido a un intervalo abierto del eje real que incluye a  $x_0$ . Mientras que en éste último caso el acercamiento a  $x_0$  puede ser solo por la izquierda o por la derecha, en las funciones de variable compleja el acercamiento hacia  $z_0$  puede realizarse desde un número infinito de direcciones diferentes, lo que impone un requisito más estricto a la existencia de la derivada de una función compleja, al exigirse que los valores del límite en todas esas direcciones sea el mismo.

Una función  $f(z)$  se denomina *holomorfa*, *analítica*<sup>3</sup>, o *regular* en una región abierta (o dominio)  $G \subseteq \mathbb{C}$  si es diferenciable en todo punto de  $G$ . En este caso se simplifica la notación de la derivada  $f'_G(z)$ , que se puede escribir entonces como  $f'(z)$  ó  $\frac{d}{dz}f(z)$  sin indicar explícitamente la región  $G$ . Según la anterior definición, si  $f(z)$  es analítica en  $G$  y  $z_0 \in G$  entonces  $f(z)$  es diferenciable en  $z = z_0$  relativo a cualquier subconjunto  $S \subset G$  que contenga a  $z_0$  como punto límite y

$$f'_S(z_0) = f'(z_0)$$

La función  $f(z)$  se dice analítica en el punto  $z = z_0$  (o en un conjunto  $S$ ) si  $f(z)$  es analítica en un conjunto abierto  $G$  que contiene a  $z_0$  (o a  $S$ ).

**Ejemplo 2.6** Calcule la derivada de la función  $f(z) = z$  dentro de todo el plano  $z$ .

**Solución:** Utilizando la definición:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

se obtiene que  $f'(z_0) = 1$  para todo  $z$ , por lo que la función es analítica en  $\mathbb{C}$ .

2.6

Sea  $T$  un subconjunto de  $S$  y sea  $z_0 \in T$  un punto límite en  $T$ . Si existe  $f'_S(z_0)$  entonces existe  $f'_T(z_0)$  y se cumple

$$f'_T(z_0) = f'_S(z_0)$$

En otras palabras, si una función es diferenciable en un conjunto entonces es diferenciable en un subconjunto menor. Lo contrario no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7** Demuestre que la función  $f(z) = z^* = x - jy$  es diferenciable en cualquier punto  $z = z_0$  relativo a un rayo  $S$  que parte desde  $z_0$ .

**Solución:** Con la definición

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^*}{z - z_0} = e^{-j2\angle(z - z_0)}$$

que es una expresión con valor constante solo si  $z \in S$  y el conjunto  $S$  representa un segmento de recta que parte desde  $z_0$ , lo que implicaría valores del mismo valor angular. Si se toman un nuevo conjunto igual a la unión de dos segmentos de recta, entonces se

---

<sup>3</sup>Formalmente, la definición brindada corresponde a una función *holomorfa*. La función es *analítica* en un punto  $z_0$  si la función se puede expresar por medio de una serie de Taylor centrada en  $z_0$ , lo que conduce a que sea infinitamente diferenciable, y por lo tanto, holomorfa. Posteriormente se presentará el hecho de que si una función es holomorfa, es diferenciable infinitamente, lo que a su vez implica que tiene una serie de Taylor asociada. Por esta razón, en este documento se utilizarán ambos términos indistintamente.

obtienen dos valores diferentes de la derivada lo que implica que la función no es analítica.

2.7

Si la función  $f(z)$  es diferenciable en el punto  $z = z_0$  con respecto al conjunto  $S$ , entonces si  $z$  tiende a  $z_0$  el cociente en (2.29) está limitado por una constante  $C$  y por lo tanto

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C|z - z_0|$$

para un radio  $|z - z_0|$  suficientemente pequeño ( $z \in S$ ) y por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

lo que implica que  $f(z)$  es continua en  $z = z_0$  con respecto al conjunto  $S$ .

### Reglas para el cálculo de derivadas

Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son funciones diferenciables en el punto  $z = z_0$  relativo a un conjunto  $S$ , y  $k \in \mathbb{C}$  entonces se cumple

$$\begin{aligned} [kf(z)]'_S &= kf'_S(z) \\ [f(z) + g(z)]'_S &= f'_S(z) + g'_S(z) \\ [f(z)g(z)]'_S &= f'_S(z)g(z) + f(z)g'_S(z) \\ \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right]'_S &= \frac{f'_S(z)g(z) - f(z)g'_S(z)}{g^2(z)} \end{aligned} \tag{2.30}$$

La regla de la cadena también es válida: si  $w = f(z)$  es diferenciable en  $z = z_0$  con respecto al conjunto  $S$ , y  $\zeta = g(w)$  se define en un conjunto  $T$  que corresponde al mapeo de todos los puntos de  $S$  suficientemente cercanos a  $z_0$ , y es diferenciable en  $w_0 = f(z_0)$ , entonces  $\zeta = h(z) = g(f(z))$  es diferenciable en  $z_0$  con respecto a  $S$  con derivada

$$h'_S(z_0) = g'_T(w_0)f'_S(z_0)$$

De forma similar a los números reales, las derivadas de orden superior se definen de forma recursiva como

$$f_S^{(n+1)}(z) = [f_S^{(n)}(z)]'_S \quad (n = 1, 2, \dots)$$

para las que además se cumple

$$\begin{aligned} [kf(z)]_S^{(n)} &= kf_S^{(n)}(z) \\ [f(z) + g(z)]_S^{(n)} &= f_S^{(n)}(z) + g_S^{(n)}(z) \end{aligned}$$

donde  $k \in \mathbb{C}$ . El cumplimiento de estas dos últimas propiedades hace que el operador de diferenciación de  $n$ -ésimo orden sea denominado un *operador lineal*.

## Algunas funciones elementales y su derivación

Puede demostrarse que la fórmula de Euler derivada anteriormente (ver ecuación (2.7)) es válida para todo el plano  $z$ , es decir:

$$e^{jz} = \cos z + j \operatorname{sen} z \quad (2.31)$$

y junto con  $e^{-jz} = \cos z - j \operatorname{sen} z$  se obtiene directamente que

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad (2.32)$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad (2.33)$$

Se cumple además que

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

por lo que, utilizando la propiedad (2.30), la regla de la cadena y las ecuaciones de seno (2.33) y coseno (2.32), se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{sen} z &= \cos z \\ \frac{d}{dz} \cos z &= -\operatorname{sen} z \end{aligned}$$

De forma similar, para las ecuaciones hiperbólicas

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -j \operatorname{sen} jz & \Rightarrow \frac{d}{dz} \operatorname{senh} z &= \cosh z \\ \operatorname{cosh} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos jz & \Rightarrow \frac{d}{dz} \operatorname{cosh} z &= \operatorname{senh} z \end{aligned}$$

Puesto que las partes real e imaginaria de la exponencial compleja están dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^z) &= e^x \cos y \\ \operatorname{Im}(e^z) &= e^x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

puede verse que a diferencia de la función exponencial de variable real ( $z = x + jy$ ,  $y = 0$ ) que es estrictamente monotónica, en el dominio complejo la función oscila de acuerdo al valor de su componente imaginaria. Puede demostrarse además que

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\ |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

de donde se observa que en caso complejo ( $\operatorname{Im}\{z\} = y \neq 0$ ) la magnitud de senos y cosenos puede superar a 1, lo cual es imposible con  $z \in \mathbb{R}$ .

Otras derivadas mantienen el formato presente en los números reales. Por ejemplo se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}z^n &= nz^{n-1} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \\ \frac{d}{dz}\ln z &= \frac{1}{z} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\end{aligned}$$

donde  $\mathbb{R}^-$  es el eje real no positivo, puesto que ahí  $\ln z$  no es analítica.

### 2.3.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro de un dominio  $S$ . Por lo tanto, su derivada en  $z_0 \in S$  existe y está dada por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

donde  $z$  puede tender a  $z_0$  por cualquier trayectoria dentro de  $S$ . Un caso especial lo representan las trayectorias paralelas a los ejes real e imaginario del plano  $z$ . Por ejemplo, si se elije una trayectoria paralela al eje real entonces  $z - z_0 = \Delta x$  entonces

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \right]$$

y puesto que  $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  entonces

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + jv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=x_0, y=y_0}\end{aligned}\tag{2.34}$$

Si ahora se elije una dirección paralela al eje imaginario, se tiene  $z - z_0 = j\Delta y$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_0 + j\Delta y) - f(z_0)}{j\Delta y} \right]$$

y similar al caso anterior se tiene además

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + jv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right] \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{j\Delta y} + j \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{x=x_0, y=y_0}\end{aligned}\tag{2.35}$$

Puesto que la función se ha asumido analítica, entonces (2.34) y (2.35) deben ser iguales, lo que solo ocurre si sus partes real e imaginarias son idénticas (ver (2.6)), es decir, si

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.36}$$

conocidas como las *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*. De esto se deriva que las ecuaciones de Cauchy-Riemann proporcionan condiciones necesarias para la existencia de la derivada de  $f(z)$  en un punto particular  $z_0$ .

Ahora, si se tienen dos funciones *continuas* de valor real  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , que a su vez tienen derivadas parciales continuas, se puede demostrar que si  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una región  $S$ , entonces  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  es analítica en  $S$ . Nótese entonces, que si la función es analítica, entonces su derivada puede calcularse eligiendo cualquier dirección, entre otras las dadas en (2.34) y (2.35).

**Ejemplo 2.8** Verifique que la función  $f(z) = z^2$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y determine la derivada  $f'(z)$ .

**Solución:** Con  $z = x + jy$  se obtiene  $f(z) = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$ , y con  $u(x, y) = x^2 - y^2$  y  $v(x, y) = 2xy$  se pueden calcular las derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x\end{aligned}$$

que obviamente cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Eligiendo la dirección en  $x$  se obtiene que la derivada es entonces

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2(x + jy) = 2z$$

2.8

### 2.3.5 Funciones conjugadas y armónicas

Un par de funciones de valor y variables reales  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  se denominan *funciones conjugadas* si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Estas funciones son ortogonales en el sentido de que las curvas en el plano  $(x, y)$  definidas por  $u(x, y) = \text{cte}$  y  $v(x, y) = \text{cte}$ , forman siempre ángulos rectos entre sí. La demostración de esto se puede realizar considerando que  $u(x, y) = v(x, y) = \text{cte}$  representan curvas de nivel, que siempre

son ortogonales al gradiente de la superficie. Así,

$$\begin{aligned}\nabla u(x, y) &= \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \\ \nabla v(x, y) &= \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

y utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtiene que

$$\nabla v(x, y) = \left[ -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right]$$

Ahora, el producto escalar de ambos gradientes es

$$\begin{aligned}\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

lo que implica que los gradientes de  $u$  y  $v$  son ortogonales entre sí, que es equivalente a que las curvas de nivel, quienes siempre forman un ángulo de  $90^\circ$  con el gradiente, son también ortogonales entre sí.

Una función se denomina *armónica* si satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si una función es analítica entonces

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

y a su vez

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Igualando los términos real e imaginario se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Esto quiere decir, que si una función es analítica en una región, entonces sus componentes real e imaginaria son funciones armónicas en esa región. Visto de otra manera, si  $u(x, y)$  es armónica, entonces a su vez existe una función conjugada  $v(x, y)$  con la que se conforma una función analítica.

**Ejemplo 2.9** Sea  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$  la componente real de una función analítica  $f(z)$  con  $z = x + jy$  en todo el plano  $z$ . Encuentre la función conjugada  $v(x, y)$  tal que  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ .



**Solución:** Como  $f(z)$  es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann deben cumplirse, por lo que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$$

Integrando con respecto a  $y$

$$v = 2xy + 2y + F(x)$$

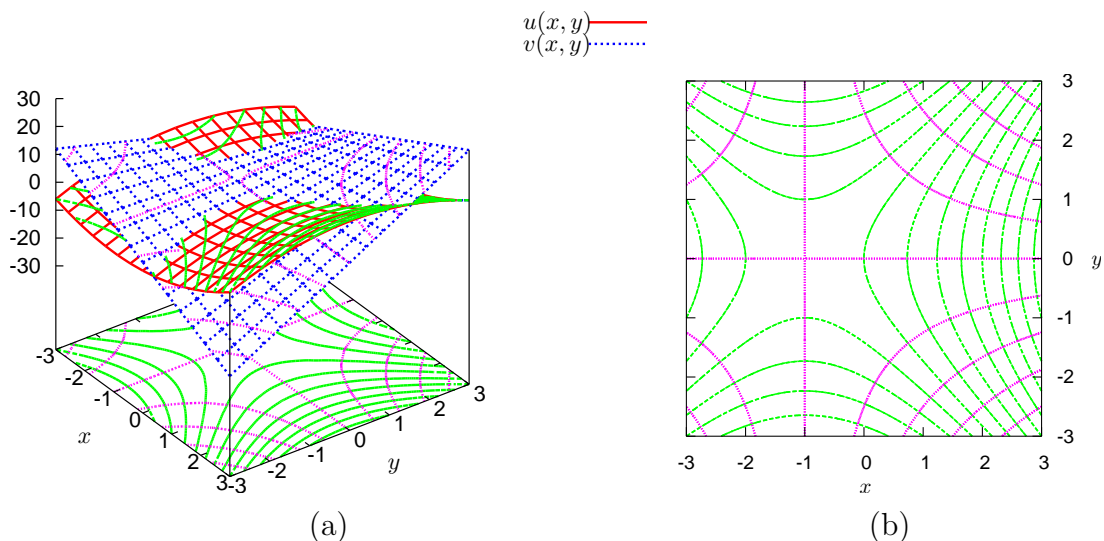
Donde  $F(x)$  es la “constante” de integración, que en este caso puede ser cualquier función de  $x$ . Derivando respecto a  $x$  y considerando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2y) = 2y$$

por lo que  $F(x)$  debe ser constante para que su derivada sea cero. Asumiendo esta constante igual a  $-jC$  se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + j(2xy + 2y - jC) \\ &= x^2 + 2x(jy) - y^2 + 2x + j2y + C \\ &= (x + jy)^2 + 2(x + jy) + C \\ &= z^2 + 2z + C \end{aligned}$$

La figura 2.18 muestra ambas componentes como superficies y sus correspondientes curvas de nivel, donde se puede apreciar su ortogonalidad. Se ha asumido  $C = 0$ .



**Figura 2.18:** Funciones conjugadas y ortogonalidad de las curvas de nivel. (a) Ambas funciones conjugadas como superficies. (b) Curvas de nivel de ambas superficies y su ortogonalidad.

### 2.3.6 Mapeos conformes

Un mapeo  $w = f(z)$  se denomina *conforme* si el ángulo que forman dos curvas en el plano  $z$  es preservando entre las dos curvas imagen del plano  $w$ . Puede demostrarse que si  $f(z)$  es una función analítica, entonces  $f(z)$  representa un mapeo conforme excepto en aquellos puntos donde la derivada  $f'(z) = 0$ .

Esta última condición permite analizar la generalidad de los mapeos introducidos anteriormente. El mapeo lineal con  $\alpha \neq 0$ :

$$w = f(z) = \alpha z + \beta \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \alpha$$

es entonces un mapeo conforme. Esto es claro puesto que el mapeo representa una rotación, escalado y traslación, que no modifican entonces la posición relativa entre las curvas (figura 2.8). El mapeo de inversión

$$w = f(z) = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

es entonces conforme en todo el plano  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , y esto se puede apreciar bien en la figura 2.12, donde el ángulo entre las líneas horizontales y verticales es de  $90^\circ$ , ángulo que se conserva en las intersecciones entre los círculos correspondientes.

Si se expresa el mapeo bilineal de la forma

$$w = f(z) = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} \quad (\alpha, \mu \neq 0)$$

entonces su derivada puede calcularse como

$$f'(z) = -\frac{\mu\alpha}{(\alpha z + \beta)^2}$$

que de nuevo nunca es cero para ningún punto finito del plano  $z$ , y es analítica en el plano  $\mathbb{C} \setminus \{-\beta/\alpha\}$ . La Carta de Smith en la figura 2.14 también muestra como las intersecciones entre los círculos que representan a las rectas horizontales y verticales también forman un ángulo de  $90^\circ$ .

**Ejemplo 2.10** Determine los puntos en los cuales el mapeo  $w = z + \frac{1}{z}$  no es conforme.

**Solución:** Utilizando  $z = x + jy$ ,  $w = u + jv$  se tiene

$$w = u + jv = x + jy + \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

por lo que

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y con

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

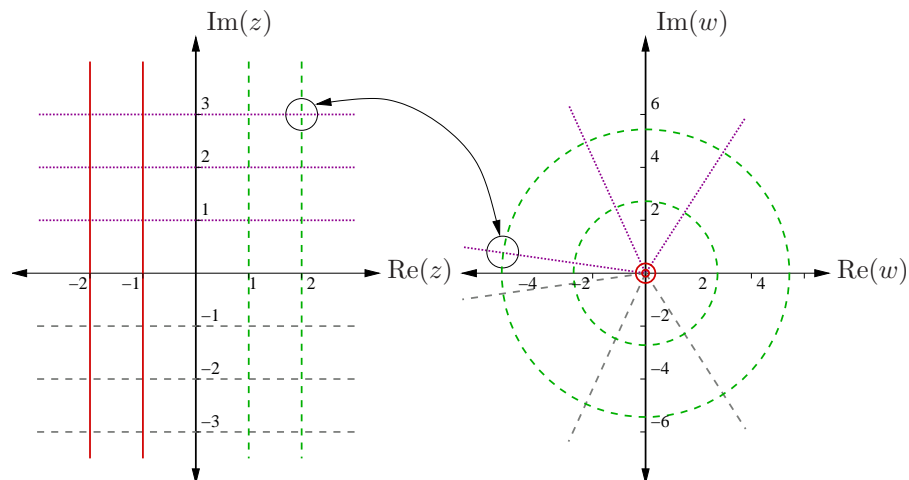
se obtiene que  $f(z)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus 0$ . Además

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} = 0$$

lo que implica que la derivada se hace cero para  $z = \pm 1$ . Por tanto el mapeo no es conforme en  $z = 0$ , y  $z = \pm 1$ . 2.10

**Ejemplo 2.11** Determine en qué dominio es el mapeo  $w = f(z) = e^z$  es conforme.

**Solución:** La derivada  $f'(z) = e^z$  está definida para todo el plano  $z$ , y por lo tanto  $f(z)$  es analítica. Puesto que  $e^z = e^x e^{jy}$  entonces puede verse que la magnitud de  $e^z$  se hace cero solo si  $x \rightarrow -\infty$ , lo que quiere decir que el mapeo es conforme en todo  $z$ . Nótese que las líneas horizontales, que poseen  $y$  constante, equivalen a líneas radiales partiendo del origen del plano  $w$ . Por otro lado las líneas verticales que tienen a  $x$  constante, representan círculos centrados en el origen de  $w$ . Obviamente las líneas radiales y los círculos presentan ángulos rectos en sus intersecciones (figura 2.19).



**Figura 2.19:** Mapeo exponencial es conforme.

2.11

## 2.4 Series complejas

Las series complejas están relacionadas directamente con el principio de *continuación analítica* mencionado previamente en la nota al pie de la página 18. Si una función  $f(x)$  de variable y valor reales ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) tiene un desarrollo como serie infinita de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$$

entonces tiene una función de variable y valor complejos correspondiente  $f(z)$  ( $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ) con un desarrollo equivalente en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots \quad (2.37)$$

Puesto que la mayoría de los operadores de cálculo diferencial e integral se basan en límites de sumas y restas que tienen un comportamiento muy similar en los dominios real y complejo, las propiedades de la así definida  $f(x)$  serán entonces aplicables a su continuación analítica  $f(z)$ . Así mismo, muchas funciones definidas a través de su representación en serie de potencias en los números reales serán entonces simplemente “continuadas analíticamente” en los números complejos (por ejemplo,  $e^x$ ,  $\sen x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln x$ , etc.). Las series complejas son utilizadas ampliamente en el análisis de sistemas digitales, por medio de la transformada  $z$ .

### 2.4.1 Series de potencias

Una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_k (z - z_0)^k + \dots \quad (2.38)$$

con  $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$  se denomina serie de potencias centrada en  $z_0$  (o alrededor de  $z_0$ ). Nótese que haciendo una sustitución de variable  $z' = z - z_0$  puede estudiarse la serie utilizando (2.37) sin pérdida de generalidad, por lo que a continuación se analizará este caso más simple.

Las pruebas de convergencia de series infinitas complejas se realizan de forma muy similar a las series reales. Por ejemplo, sea la serie finita (revisar problema 2.63)

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

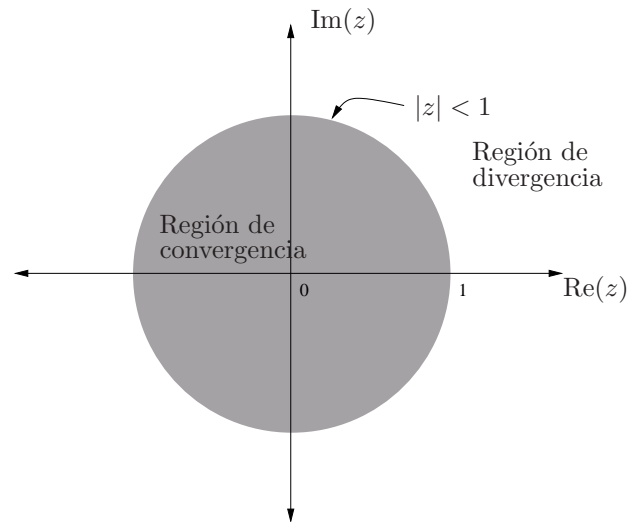
Si  $z = |z|e^{j\theta}$  entonces  $z^N = |z|^N e^{jN\theta}$ , y si  $N \rightarrow \infty$  entonces  $z^N$  converge solo si  $|z| < 1$ , y converge a cero, por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Esta serie diverge si  $|z| \geq 1$ . Ambos resultados son consistentes con la continuación analítica del caso real, donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

es decir, la serie converge si  $z$  se encuentra dentro del círculo unitario del plano complejo (figura 2.20). Nótese que la región de convergencia para la serie real corresponde a la



**Figura 2.20:** Región de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ .

intersección entre esta región circular del plano  $z$  y el eje real; es decir, el intervalo  $x \in ]-1, 1[$ .

En general, la serie de potencias anterior extendida con coeficientes constantes de ponderación  $a_n$  para cada término  $z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.39}$$

converge si  $|z| < R$ , y diverge si  $|z| > R$ , donde a  $R$  se le denomina *radio de convergencia*. El caso  $|z| = R$  deberá analizarse por separado.

Una pregunta planteada en el análisis de convergencia de la suma (2.39) es, cómo deben comportarse los términos  $a_n z^n$  cuando  $n$  tiende a infinito para poder converger. Sea  $S_k$  la suma parcial de los primeros  $k$  términos de la serie de potencias

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i$$

de tal forma que se cumple para la suma de los primeros  $n+1$  términos que

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i z^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i + a_n z^n = S_n + a_n z^n$$

de donde se aprecia que el  $n$ -ésimo término de (2.39) se puede obtener con

$$a_n z^n = S_{n+1} - S_n.$$

Si la serie de potencias converge a  $S$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0$$

lo que implica que para que la serie converja entonces sus términos en  $n \rightarrow \infty$  deben tender a cero como condición necesaria (pero no suficiente).

Para determinar el radio de convergencia  $R$  de una serie de potencias puede utilizarse entre otros la razón de D’Alambert (o también llamada fórmula de Cauchy-Hadamard), la cual establece que el radio de convergencia de (2.39) está dado por

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (2.40)$$

siempre que el límite exista.

Regresando a la serie (2.38), ésta converge cuando  $|z - z_0| < R$ , es decir, cuando el valor de  $z$  se encuentra dentro de un círculo de radio  $R$  centrado en  $z_0$ . Por otro lado, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{z - z_0} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + \dots \quad (2.41)$$

puede transformarse en (2.39) con  $z' = \frac{1}{z - z_0}$ , lo que implicaría que la región de convergencia será

$$|z'| < R \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{z - z_0} \right| < R \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| > \frac{1}{R}$$

que corresponde al exterior de un círculo de radio  $1/R$  centrado en el punto de desarrollo  $z_0$ , y divergirá en el interior de dicho círculo ( $|z| < 1/R$ ). Esto tiene sentido si se observa que  $1/z^k$  se hace arbitrariamente grande si  $z$  se acerca a cero, lo que indica que este último debe estar excluido de la región de convergencia. Además, puesto que los términos de la suma deben tender a cero para  $n \rightarrow \infty$ , esto solo puede ocurrir si el denominador es suficientemente grande.

Usualmente, para estas regiones externas a un círculo centrado en  $z_0$  se utiliza la expresión “centradas en infinito”, lo que solo debe dar la idea de que la región conexa “inicia” en el infinito hasta alcanzar la frontera circular de radio  $1/R$  y centrada en  $z_0$ , tal y como ocurre en el plano  $z'$ , donde la región de convergencia “parte” del origen hasta alcanzar el círculo de radio  $R$ .

**Ejemplo 2.12** Demuestre que el radio de convergencia de (2.39) y su derivada son idénticos.

**Solución:** Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Si  $R$  es el radio de convergencia de  $f(z)$  dado por (2.40) y  $R'$  el radio de convergencia de  $f'(z)$ , este último es, según la razón de D'Alambert:

$$\begin{aligned} R' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right| \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) = 1 \cdot R \\ &= R \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la propiedad del producto de los límites reales. 2.12

**Ejemplo 2.13** Determine la serie de potencias que representa a la función

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

y su radio de convergencia.

**Solución:** Existe un número infinito de representaciones para esta función, cada una con su propio radio de convergencia, dependiendo de dónde se centre la serie de potencias; sin embargo, puesto que  $f(a)$  no está definido, ninguna de la representaciones convergerá para  $z = a$ .

Por ejemplo, si se realiza la división polinomial de 1 entre  $z - a$ , se obtiene (figura 2.21):

$\begin{array}{r} 1 \\ -(1-az^{-1}) \\ \hline az^{-1} \\ -(az^{-1}-a^2z^{-2}) \\ \hline a^2z^{-2} \\ -(a^2z^{-2}-a^3z^{-3}) \\ \hline a^3z^{-3} \\ -(a^3z^{-3}-a^4z^{-4}) \\ \hline a^4z^{-4} \\ \vdots \end{array}$	$\frac{z-a}{z^{-1} + az^{-2} + a^2z^{-3} + a^3z^{-4} + a^4z^{-5} \dots}$
--	--

**Figura 2.21:** División polinomial de 1 entre  $z - a$ .

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \left( \frac{1}{z} \right)^n$$

Ahora, si se hace el cambio de variable  $z' = 1/z$  y se aplica la razón de D'Alambert entonces se tiene que el radio de convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}(z')^n$  es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n-1}}{a^n} \right| = \left| \frac{1}{a} \right|$$

lo que quiere decir que la serie converge si

$$|z'| < \left| \frac{1}{a} \right| \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < \left| \frac{1}{a} \right| \Rightarrow |z| > |a|$$

Por otro lado, si ahora se realiza la división polinomial de 1 entre  $-a + z$ , se obtiene (figura 2.22):

$$\frac{1}{z - a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \quad (2.42)$$

1	$-a + z$
$-(1 - \frac{z}{a})$	$-\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} - \dots$
$\frac{z}{a}$	
$-(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2})$	
$\frac{z^2}{a^2}$	
$-(\frac{z^2}{a^2} - \frac{z^3}{a^3})$	
$\frac{z^3}{a^3}$	
$-(\frac{z^3}{a^3} - \frac{z^4}{a^4})$	
$\frac{z^4}{a^4}$	
$\vdots$	

**Figura 2.22:** División polinomial de 1 entre  $-a + z$ .

Si se aplica la razón de D'Alambert entonces se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+2}}{a^{n+1}} \right| = |a|$$

lo que quiere decir que la serie converge si

$$|z| < |a|$$

El primer caso centró la serie de potencias en  $z = \infty$ , el segundo caso en  $z = 0$ . Sin embargo, es posible centrar la serie en cualquier otro punto, siempre que  $z = a$  no esté incluido dentro de la región de convergencia. Si se quiere por ejemplo encontrar la serie de potencias de la función anterior centrada en  $z_0$ , ( $z_0 \neq a$ ) la función puede reescribirse sumando y restando  $z_0$  en el denominador como

$$\frac{1}{z - a} = \frac{1}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \frac{1}{z' - a'} \quad (2.43)$$



con  $z' = z - z_0$  y  $a' = a - z_0$ . Esta expresión puede a su vez descomponerse en las dos versiones de series de potencia descritas anteriormente:

$$\frac{1}{z - a} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} & \text{para } |z - z_0| > |a - z_0| \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(a - z_0)^{n+1}} & \text{para } |z - z_0| < |a - z_0| \end{cases}$$

Lo que debe notarse es que, mientras en las versiones originales las regiones de convergencia estaban dadas por el área externa o interna de un círculo de radio  $a$  centrado en el origen, ahora serán las regiones internas o externas de un círculo centrado en  $z_0$  de radio  $|a - z_0|$ , es decir, de un radio igual a la distancia entre el punto  $a$  donde la función no está definida y el punto donde se centra la serie de potencias  $z_0$  (figura 2.23).

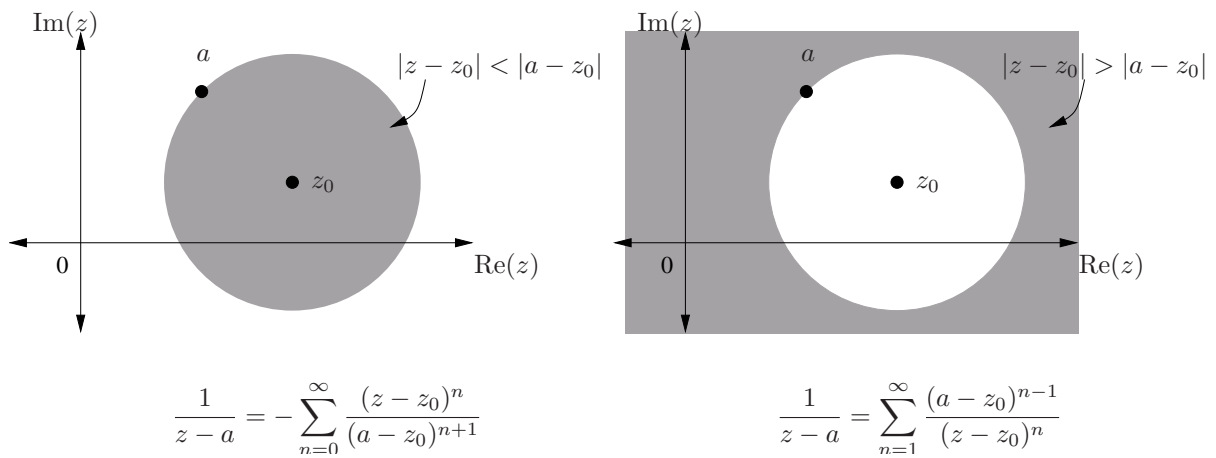


Figura 2.23: Regiones de convergencia para series de potencia de  $1/(z - a)$ .

2.13

### 2.4.2 Series de Taylor

Sea  $f(z)$  una función compleja analítica dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$  (como por ejemplo, un círculo) en el plano  $z$ . El ejemplo 2.12 demostró que derivadas superiores mantienen el mismo radio de convergencia. Si  $z_0$  y  $z_0 + h$  son dos puntos fijos dentro de la región de convergencia entonces se cumple

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (2.44)$$

lo que también puede ser expresado con  $h = z - z_0$  como

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \end{aligned} \quad (2.45)$$

que es un caso especial de la serie de potencias (2.38) con los coeficientes

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Esta última representación en serie de potencias se conoce como desarrollo en *Serie de Taylor* de la función  $f(z)$  alrededor de  $z_0$  y converge para  $|z - z_0| < R$ , donde el radio de convergencia  $R$  está determinado por lo general por el punto más cercano a  $z_0$  donde  $f(z)$  no es analítica. El caso especial  $z_0 = 0$  se conoce también como desarrollo en Serie de MacLaurin. Esto representa la continuación analítica del caso real.

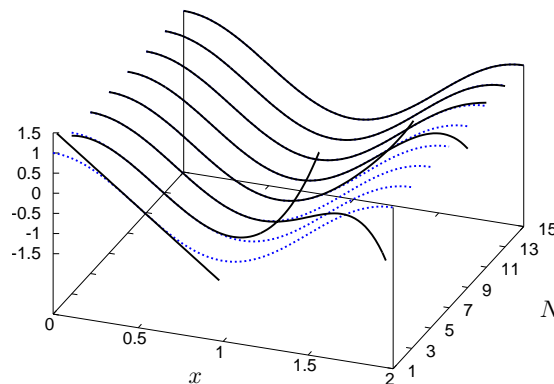
**Ejemplo 2.14** Encuentre la serie de Taylor centrada en  $z_0 = 1/2$  de la función  $f(z) = \cos(\pi z)$ .

**Solución:** Utilizando la definición el lector puede demostrar que

$$\cos(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$

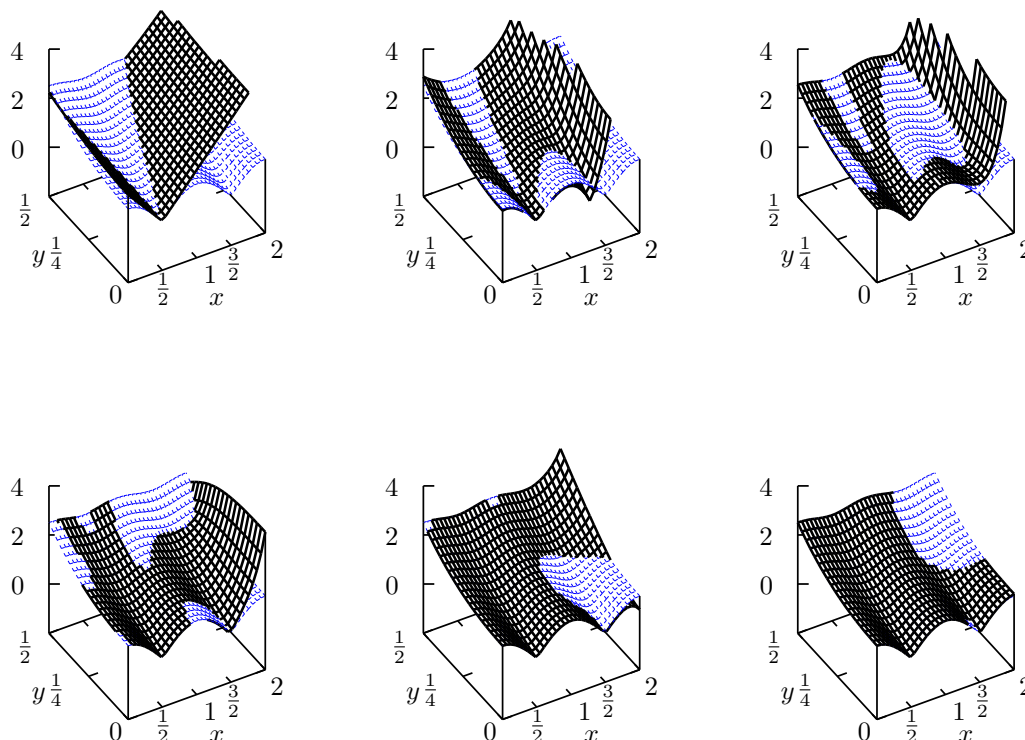
donde los coeficientes  $a_n$  están dados por

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi^n}{n!} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$



**Figura 2.24:** Aproximación de la función  $\cos(\pi x)$  (línea punteada) por los primeros  $N$  términos de la serie de Taylor centrada en  $x_0 = 1/2$  (línea gruesa).

La figura 2.24 muestra la aproximación de la función de variable y valor reales  $f(x) = \cos(\pi x)$  con los primeros  $N$  términos de la serie de Taylor centrada en  $x_0 = 1/2$ . La figura 2.25 muestra la magnitud de seis aproximaciones de la función  $f(z)$  para diferente número de términos  $N$  de esta serie.



**Figura 2.25:** Magnitud de la aproximación por medio de series de Taylor de la función  $\cos(\pi z)$  para (de izquierda a derecha, primera y luego segunda filas)  $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$  términos de la serie, respectivamente. Se han superpuesto la magnitud de la función  $\cos(\pi z)$  (línea punteada) con la aproximación correspondiente (línea gruesa).

**Ejemplo 2.15** Encuentre el desarrollo en serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2j)} \quad (2.46)$$

alrededor del punto  $z_0 = j$ .

**Solución:** La derivada de (2.46) puede calcularse de manera más fácil si se encuentra su representación en *fracciones parciales*:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2j}$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $z$  a ambos lados y haciendo  $z = 0$  se encuentra que  $A = -1/(2j)$ , y multiplicando por  $z - 2j$  y haciendo  $z = 2j$  se despeja  $B = 1/(2j)$  con lo que finalmente

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{z-2j} - \frac{1}{z} \right)$$

Las derivadas y sus evaluaciones en  $z = j$  son entonces

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{z-2j} - \frac{1}{z} \right) \quad \Rightarrow \quad f(j) = 1$$

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2j} \left( -\frac{1}{(z-2j)^2} + \frac{1}{z^2} \right) && \Rightarrow f'(j) = 0 \\
f''(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{2}{(z-2j)^3} - \frac{2}{z^3} \right) && \Rightarrow f''(j) = -2 \\
f^{(3)}(z) &= \frac{1}{2j} \left( -\frac{6}{(z-2j)^4} + \frac{6}{z^4} \right) && \Rightarrow f^{(3)}(j) = 0 \\
f^{(4)}(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{24}{(z-2j)^5} - \frac{24}{z^5} \right) && \Rightarrow f^{(4)}(j) = 24
\end{aligned}$$

que se puede generalizar como

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n}{2j} \left( \frac{n!}{(z-2j)^{n+1}} - \frac{n!}{z^{n+1}} \right) \Rightarrow f^{(n)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2} n! & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Esto implica que el  $n$ -ésimo término de la serie de Taylor es

$$\frac{(z-j)^n}{n!} f^{(n)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{(z-j)^n}{n!} (-1)^{n/2} n! = (z-j)^n (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto

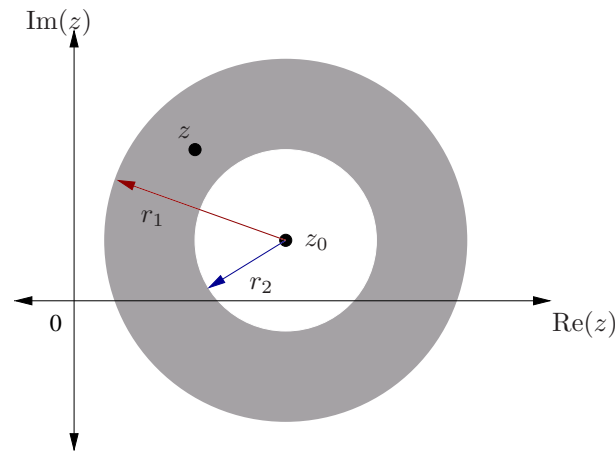
$$\frac{1}{z(z-j)^2} = 1 - (z-j)^2 + (z-j)^4 - (z-j)^6 + \dots$$

En este caso  $z_0 = j$ , y puesto que los dos puntos donde  $f(z)$  no está definido son  $z = 0$  y  $z = 2j$  el radio de convergencia es igual a uno. En otras palabras, la serie de Taylor anterior es válida solo para puntos  $z$  que se encuentren dentro de un círculo de radio uno centrado en  $j$ . 2.15

### 2.4.3 Series de Laurent

Ya se discutió anteriormente que las series de potencias de la forma descrita por (2.41) tienen su radio de convergencia centrado en  $z = \infty$ . Allí se excluyó  $z = z_0$  de la región de convergencia. En general aquellos puntos donde una función no es analítica (llamados también *singularidades*) no podrán ser utilizados como centros de los desarrollos en series de Taylor, puesto que las derivadas de la función no existen y por lo tanto no es posible obtener los coeficientes de la serie. En el ejemplo 2.13 se pudo observar además que la región de convergencia siempre excluyó a la singularidad (ver figura 2.23). En ese ejemplo el radio de convergencia obtenido fue igual a la distancia entre el centro del desarrollo y la singularidad. En general, el desarrollo en serie de Taylor de una función  $f(z)$  centrado en  $z_0$  será válido solo dentro de una región circular que no contenga singularidades.

Las series de Laurent por otro lado constituyen una generalización de las series de potencia, donde la región de convergencia es ahora de forma anular que puede entonces excluir singularidades en su interior (figura 2.26). Puede demostrarse que para una región de



**Figura 2.26:** Región de convergencia anular de las series de Laurent

convergencia anular  $r_2 < |z - z_0| < r_1$  centrada en  $z_0$ , la función  $f(z)$  de variable compleja tendrá el desarrollo

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \dots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} \\ &\quad + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_k(z - z_0)^k + \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

con  $c_i \in \mathbb{C}$ . Esta serie puede descomponerse como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (2.48)$$

donde la suma con coeficientes  $c_i$  para  $i < 0$  se denomina la *parte principal* de la serie de Laurent, y al segundo término se le conoce como parte de Taylor. Si  $f(z)$  es analítica para todos los puntos en el interior del círculo externo, es decir, para  $|z - z_0| < r_1$  entonces  $c_i = 0$  para  $i < 0$  y (2.48) conserva solo su segunda suma que equivale a la serie de Taylor.

De forma similar a las series de Taylor, la región anular de convergencia estará delimitada por lo general por puntos donde la función no está definida o no es analítica, conservando una región anular abierta que no contiene ninguna singularidad.

**Ejemplo 2.16** Calcule la serie de Laurent para la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$$

centrada en  $z_0 = 0$  y en  $z_0 = -1$ , para una región de convergencia anular.

**Solución:** Para el caso  $z_0 = 0$  se pueden utilizar los resultados del ejemplo 2.13 en su ecuación (2.42), con los que se obtiene que el factor  $1/(z+1)$  se puede expandir como

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

con radio de convergencia  $|z| < 1$ . El término en cuestión será entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(1+z)} &= \frac{1}{z^2}(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \dots\end{aligned}$$

donde ahora debe excluirse al 0 de la región de convergencia debido a los dos primeros términos de la serie.

Para el caso  $z_0 = -1$  se requiere expresar la serie de potencias en términos de  $(z+1)^k$ . Para ello puede procederse con el término

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z+1-1)^2} = \frac{1}{(z'-1)^2} = \frac{1}{z'^2 - 2z' + 1}$$

con  $z' = (z+1)$ . Puesto que hay otro polo en  $z = 0$ , la región de convergencia, para este término aislado, podría ser el exterior del círculo de radio 1 centrado en  $z = -1$ , o su interior. Puesto que se necesita una región de convergencia anular, se escoge el interior del círculo, para luego excluir el punto singular en  $z = -1$ . Realizando la división polinomial para obtener la región de convergencia  $|z'| < 1$  se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} &= 1 + 2z' + 3z'^2 + 4z'^3 + 5z'^4 + \dots \\ &= 1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + 4(z+1)^3 + 5(z+1)^4 + \dots\end{aligned}$$

con lo que la función original tiene una expansión de Laurent centrada en  $z_0 = -1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + 4(z+1)^3 + 5(z+1)^4 + \dots}{z+1} \\ &= \frac{1}{z+1} + 2 + 3(z+1) + 4(z+1)^2 + 5(z+1)^3 + \dots\end{aligned}$$

con región de convergencia  $0 < |z+1| < 1$ . 2.16

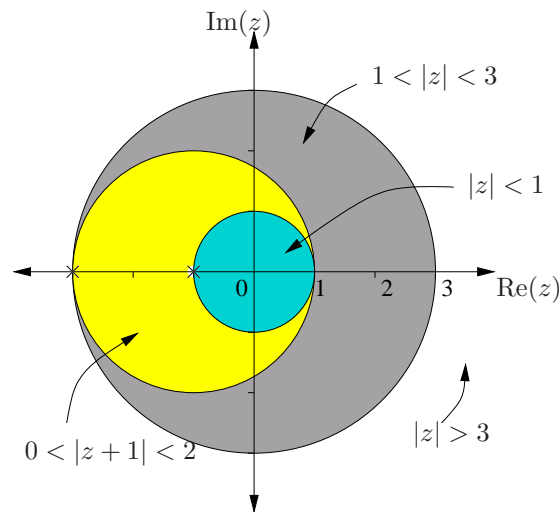
**Ejemplo 2.17** Determine la expansión en serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

para las regiones de convergencia (figura 2.27):

1.  $1 < |z| < 3$
2.  $|z| > 3$
3.  $0 < |z+1| < 2$
4.  $|z| < 1$
5.  $|z-1| < 2$

**Solución:** Esto puede solucionarse más fácilmente descomponiendo la función en fracciones parciales y aplicando los resultados del ejemplo 2.13.



**Figura 2.27:** Cuatro regiones de convergencia para el ejemplo 2.17.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3}$$

Multiplicando ambos lados por  $(z+1)$  y evaluando en  $z = -1$  se obtiene  $A = 1/2$ . Además, multiplicando ambos lados por  $(z+3)$  y evaluando en  $z = -3$  resulta  $B = -1/2$ , y por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right]$$

Para el primer término se tiene (por división polinomial) centrado el desarrollo en  $z_0 = 0$

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad \text{si } |z| < 1 \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \dots, \quad \text{si } |z| > 1 \quad (2.50)$$

mientras que el segundo término (también centrado en  $z_0 = 0$ ):

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}z + \frac{1}{3^3}z^2 - \frac{1}{3^4}z^3 + \dots, \quad \text{si } |z| < 3 \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} - \dots, \quad \text{si } |z| > 3 \quad (2.52)$$

Para el caso  $1 < |z| < 3$  se utiliza (2.50) y (2.51) que resulta en la serie de Laurent

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \dots - \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18}z - \frac{1}{54}z^2 + \frac{1}{162}z^3 - \dots$$

El caso  $|z| > 3$  utiliza (2.50) y (2.52) que resulta en la serie de Laurent centrada en  $z_0 = \infty$

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

El caso  $0 < |z + 1| < 2$  está centrado en una singularidad por lo que debe procederse de diferente forma. El factor

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z+1)+2} = \frac{1}{z'+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z' + \frac{1}{2^3}z'^2 - \frac{1}{2^4}z'^3 + \dots$$

lo que implica que este factor se puede desarrollar centrado en  $z_0 = -1$  como

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(z+1) + \frac{1}{2^3}(z+1)^2 - \frac{1}{2^4}(z+1)^3 + \dots$$

por lo que se tiene finalmente el desarrollo

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots$$

El caso  $|z| < 1$  utiliza (2.49) y (2.51) que resulta en la serie de Laurent centrada en  $z_0 = 0$

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

que es a su vez una serie de Taylor.

En el último caso  $|z - 1| < 2$  se centra la serie en 1, por lo que cada uno de los términos debe reevaluarse. Considerando que se requiere la convergencia solo para el interior del círculo se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-1+1+1} = \frac{1}{z'+2} = \frac{1}{2} - \frac{z'}{2^2} + \frac{z'^2}{2^3} - \frac{z'^3}{2^4} + \frac{z'^4}{2^5} - \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z-1}{2^2} + \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} + \frac{(z-1)^4}{2^5} - \dots \end{aligned}$$

y para el otro término

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{z-1+1+3} = \frac{1}{z'+4} = \frac{1}{4} - \frac{z'}{4^2} + \frac{z'^2}{4^3} - \frac{z'^3}{4^4} + \frac{z'^4}{4^5} - \dots \\ &= \frac{1}{4} - \frac{z-1}{4^2} + \frac{(z-1)^2}{4^3} - \frac{(z-1)^3}{4^4} + \frac{(z-1)^4}{4^5} - \dots \end{aligned}$$

y combinando ambos términos se obtiene<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{8} - \frac{3}{32}(z-1) + \frac{7}{128}(z-1)^2 - \frac{15}{512}(z-1)^3 + \frac{31}{2048}(z-1)^4 \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \frac{(-1)^k}{8} \left( \frac{2^{k+1} - 1}{2^{2k}} \right) \end{aligned}$$

2.17

<sup>4</sup>Este resultado se puede obtener también por medio de la división polinomial de  $\frac{1}{(z-1+2)(z-1+4)} = \frac{1}{(z'+2)(z'+4)} = \frac{1}{z'^2+6z'+8}$  sustituyendo en el resultado  $z' = z - 1$



## 2.5 Singularidades, ceros y residuos

### 2.5.1 Singularidades y ceros

Como *singularidad* de una función de variable compleja  $f(z)$  se conocen aquellos puntos del dominio de definición donde  $f(z)$  no es analítica. Esto puede ser ya sea porque la función se indefine, se hace infinita, o su derivada adquiere diferentes valores dependiendo de la dirección de derivación.

Cada punto del dominio de definición de  $f(z)$  se puede clasificar en términos del desarrollo en serie de Laurent. Si el desarrollo en serie centrado en  $z_0$ , donde  $z_0$  es un punto límite de la región de convergencia, tiene parte principal igual a cero, se dice entonces de  $z = z_0$  es un *punto regular*. Si la parte principal de este desarrollo contiene un número finito de términos, entonces a  $z_0$  se le denomina *polo*, por ejemplo:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_k(z - z_0)^k + \dots$$

En la representación anterior, al mayor exponente de la parte principal (es decir, a  $m$ ) se le denomina *orden del polo*, o expresado de otra forma, el orden del polo es número natural  $m$  para el que se cumple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m}$$

donde  $a_{-m}$  es finito y distinto de cero.

Una singularidad en  $z = z_0$  se denomina *esencial* si la parte principal de la serie de Laurent contiene un número infinito de términos.

Como *cero* de una función de variable compleja se conocen aquellos puntos  $z = z_0$  donde  $f(z_0) = 0$ . El cero en  $z_0$  tiene orden  $n$  cuando no solo  $f(z)$ , sino también las siguientes  $n - 1$  derivadas de  $f(z)$  se hacen cero en  $z = z_0$ , es decir, si  $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$  pero  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Nótese que si se hace un desarrollo de Taylor para  $f(z)$  centrado en un cero de  $n$ -ésimo orden, entonces los primeros  $n$  términos  $a_0, \dots, a_{n-1}$  desaparecen y por tanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Si  $f(z)$  es analítica y tiene un cero en  $z_0$ , entonces el cero  $z_0$  está *aislado*, es decir, existe una vecindad de  $z_0$  que no contiene otros ceros adicionales. Esto se aprecia directamente en (2.53), pues si  $f(z)$  es analítica tiene entonces el allí indicado desarrollo de Taylor, donde el término entre paréntesis cuadrados, para valores de  $z$  muy cercanos a  $z_0$ , tenderá a  $a_n$  y por tanto será siempre diferente cero.

Las siguientes funciones presentan diferentes tipos de singularidades:

1.  $f(z) = 1 + 2z - 3z^2$  solo tiene puntos regulares.

2.  $f(z) = z^{-1}$  tiene un polo de primer orden en  $z = 0$ .
3.  $f(z) = (z - j)^{-2}$  tiene un polo de segundo orden en  $z = j$ .
4.  $f(z) = e^{1/(z+1)}$  tiene una singularidad esencial en  $z = -1$ .
5. La función

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z + j2)(z - 1)^3}$$

tiene un cero de primer orden en  $z = -1$ , un polo de primer orden en  $z = -j2$  y un polo de orden 3 en  $z = 1$ .

6. La función

$$f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$$

no está definida en  $z = 0$ . Sin embargo si se define la función  $\text{sa}(z)$  (también llamada  $\text{si}(z)$  o  $\text{senc}(z)$ ) como

$$\text{sa}(z) = \begin{cases} \frac{\text{sen } z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

entonces se obtiene una serie de Taylor

$$\begin{aligned} \text{sa}(z) &= \frac{1}{z} \left[ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \dots \end{aligned}$$

que es regular para todo  $z$  incluyendo a  $z = 0$ . La aparente singularidad en  $z = 0$  se dice en este caso que es *removable*. Esta función tiene ceros en  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

A una función  $f(z)$  se le denomina *meromorfa* si todas sus singularidades son polos.

Nótese que si la función  $f(z)$  puede representarse como un cociente de dos polinomios  $P(z)$  y  $Q(z)$ :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

entonces los ceros del polinomio  $Q(z)$  serán polos de la función meromorfa  $f(z)$ , y los ceros de  $P(z)$  serán ceros de  $f(z)$  siempre y cuando los ceros de  $P(z)$  y los ceros de  $Q(z)$  no coincidan. El orden de los ceros de  $Q(z)$  será a su vez el orden de los polos de  $f(z)$ . Para los desarrollos de Laurent de este tipo de funciones, las posibles regiones de convergencia estarán delimitadas siempre por los polos, es decir, los anillos de convergencia tendrán siempre en sus límites algún polo de la función.

## 2.5.2 Residuos

Si una función de variable compleja  $f(z)$  tiene un polo en  $z = z_0$  entonces el coeficiente  $a_{-1}$  de la serie de Laurent centrada en  $z_0$ , en una región de convergencia donde  $z_0$  es un punto límite, se denomina *residuo* de  $f(z)$  en  $z = z_0$ .

En la sección 2.6.4 se demostrará la importancia de los residuos, cuyo cálculo puede realizarse sin tener que obtener el desarrollo completo de la serie Laurent. Por ejemplo, si  $f(z)$  tiene un solo polo simple en  $z_0$ , entonces su desarrollo en serie de Laurent es:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $(z - z_0)$  y haciendo tender  $z$  hacia  $z_0$  se obtiene:

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$$

Si la función  $f(z)$  tiene un polo de orden dos en  $z = z_0$  entonces su desarrollo de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

y para aislar el residuo  $a_{-1}$  puede ahora multiplicarse ambos lados por  $(z - z_0)^2$  seguido de una derivación:

$$\begin{aligned} (z - z_0)^2 f(z) &= a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + a_1(z - z_0)^3 + \dots \\ \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] &= a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + 4a_2(z - z_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

con lo que finalmente se puede obtener el residuo  $a_{-1}$  por medio de

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) \right] \quad (2.54)$$

Este proceso puede continuarse para polos de orden superior, con lo que se obtiene que, si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_0$  entonces el residuo estará dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\} \quad (2.55)$$

**Ejemplo 2.18** Determine el residuo de

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)(2z - 1)}$$

en cada uno de sus polos.

**Solución:** Representando  $f(z)$  en forma normalizada se tiene que

$$f(z) = \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})}$$

Así, para el residuo en  $z = j$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow j} (z - j) \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \frac{z}{(z + j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{j}{2j(j - \frac{1}{2})} = -\frac{1 + 2j}{5} \end{aligned}$$

Para el residuo en  $z = -j$  de forma equivalente

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow -j} (z + j) \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow -j} \frac{z}{(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{-j}{-2j(-j - \frac{1}{2})} = -\frac{1 - 2j}{5} \end{aligned}$$

y finalmente para  $z = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \left( z - \frac{1}{2} \right) \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{z}{(z + j)(z - j)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2} - j)(\frac{1}{2} + j)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2.18

**Ejemplo 2.19** Determine los residuos de

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)}$$

en cada uno de sus polos en el plano  $z$ .

**Solución:** La función puede reescribirse como

$$f(z) = \frac{z(z - 2)}{(z + 1)^2(z - 2j)(z + 2j)}$$

lo que implica que  $f(z)$  tiene polos simples en  $z = 2j$  y  $z = -2j$  y un polo doble en  $z = -1$ . Además la función tiene un cero en  $z = 0$  y otro en  $z = 2$ . Para los dos primeros polos se procede de la misma manera que en el ejemplo anterior. Para el polo  $z = 2j$ .

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 2j} (z - 2j) \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z - 2j)(z + 2j)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z + 2j)} \\ &= \frac{-4 - 4j}{(2j + 1)^2 4j} = \frac{1}{25}(7 + j) \end{aligned}$$

Para el polo  $z = -2j$ .

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow -2j} (z + 2j) \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z - 2j)(z + 2j)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2j} \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z - 2j)} \\ &= \frac{-4 + 4j}{-(-2j + 1)^2 4j} = \frac{1}{25}(7 - j) \end{aligned}$$

Para el polo doble en  $z = -1$  se utiliza la ecuación (2.55), con lo que

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ (z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25} \end{aligned}$$

2.19

La ecuación (2.55) es aplicable siempre y cuando el número de términos en la parte principal sea finito, es decir, aplica para polos. En el caso de singularidades esenciales debe encontrarse el residuo desarrollando la serie, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.20** Encuentre los residuos de la función  $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$  en  $z = 0$  y  $z = 1$ , e indique qué tipo de puntos son éstos.

**Solución:**

El punto  $z = 0$  es un punto regular ( $f(0) = 1/e$ ), puesto que la función es holomorfa allí, y por tanto tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en  $z = 0$ , es decir, la parte principal de la serie de Laurent correspondiente es cero y por tanto el residuo de dicho punto es igual a  $a_{-1} = 0$ .

El punto  $z = 1$  corresponde a una singularidad esencial, puesto que  $e^{z'}$  tiene como serie de Taylor

$$e^{z'} = 1 + \frac{z'}{1!} + \frac{z'^2}{2!} + \frac{z'^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$$

y con  $z' = 1/(z-1)$  se obtiene la serie

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z-1}} &= 1 + \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-n}}{n!} \end{aligned}$$

de donde se observa que la parte principal es de longitud infinita, con el coeficiente del término  $1/(z-1)$  igual a  $a_{-1} = 1$  que corresponde al residuo en  $z = 1$ .

2.20

## 2.6 Integración compleja

En el cálculo integral de funciones de variable real se distingue entre integrales definidas e integrales indefinidas o antiderivadas. Las integrales indefinidas tienen la propiedad:

$$F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La continuación analítica de lo anterior puede utilizarse para definir las integrales *indefinidas* de variable compleja:

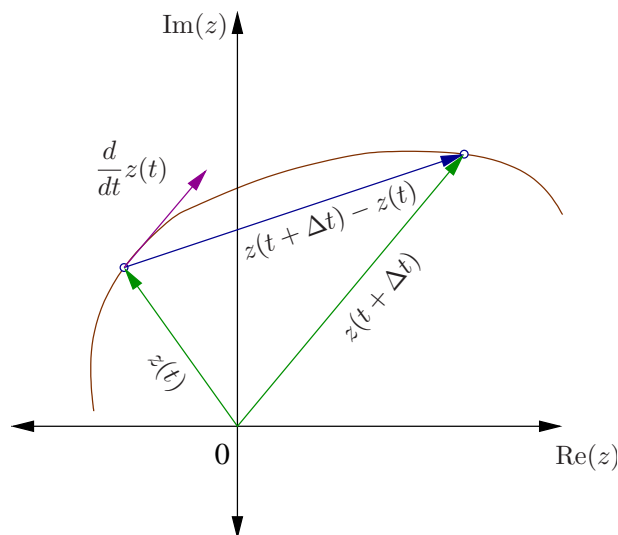
$$F(z) = \int f(z) dz \Rightarrow \frac{d}{dz}F(z) = f(z)$$

Por otro lado, mientras que la integración *definida* para funciones de variable real ocurre dentro de intervalos cerrados en el eje real  $[a, b] \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

en el caso de funciones de variable compleja debe elegirse primero la *trayectoria de integración*  $C$ , que puede por ejemplo representarse de forma paramétrica como

$$C = \{z : z(t) = x(t) + jy(t), t_a \leq t \leq t_b\}$$



**Figura 2.28:** Tangente a trayectoria de integración

La tangente en cada punto de esta curva  $C$  se puede calcular por medio de la derivada de su función paramétrica con respecto a  $t$  (figura 2.28):

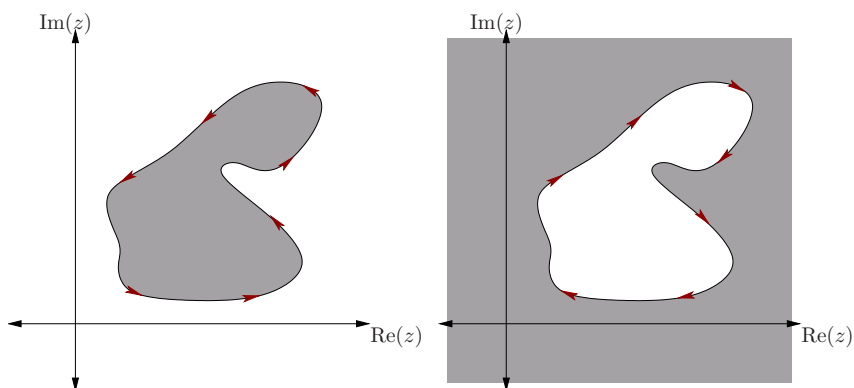
$$\frac{d}{dt}z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

Si esta derivada  $dz(t)/dt$  existe, es diferente de cero, y es continua para un subintervalo de  $[t_a, t_b]$ , entonces se dice que la trayectoria  $z(t)$  describe una curva *suave*.

Una trayectoria de integración se llamará *cerrada* si  $z(t_a) = z(t_b)$ , es decir, si el punto inicial es idéntico al punto final, y se denomina *simple* si para todo par de valores  $t_1, t_2 \in ]t_a, t_b[$  con  $t_1 \neq t_2$  se cumple  $z(t_1) \neq z(t_2)$  y además  $z(t_1) \neq z(t_a)$ ,  $z(t_2) \neq z(t_b)$ , es decir, si no hay intersecciones en la curva descrita. Una curva simple y cerrada se denomina *curva de Jordan* y tiene la propiedad de partir el plano en dos conjuntos disjuntos: uno acotado

y otro ilimitado. La región acotada por una curva de Jordan se denomina *convexa*, si cualesquiera dos puntos dentro de ella pueden ser unidos por exactamente un segmento de recta que contiene solo puntos de la región.

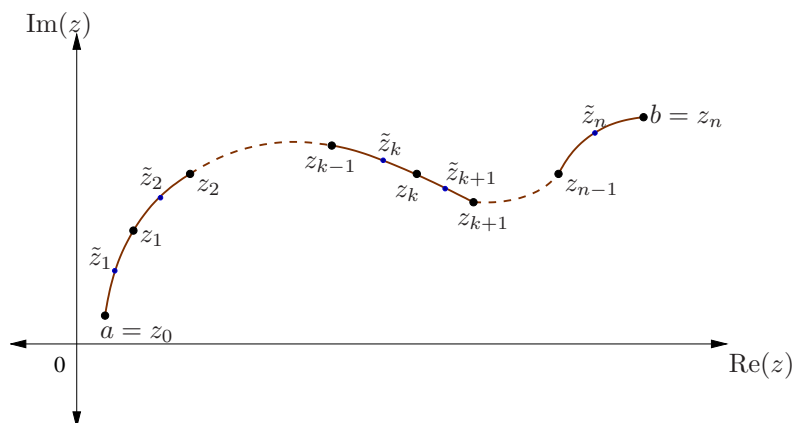
Una curva de Jordan se dice tener sentido positivo si los puntos de la región acotada se encuentran al lado izquierdo de la trayectoria que se describe conforme  $t$  aumenta. Si la curva de Jordan delimita una región convexa, el sentido positivo es equivalente a decir que, si  $t$  aumenta, entonces la trayectoria descrita sigue el sentido contrario a las manecillas del reloj (figura 2.29). La curva de Jordan tiene sentido negativo si al lado izquierdo de la trayectoria se encuentran los puntos de la región ilimitada.



**Figura 2.29:** En sentido positivo la trayectoria tiene su izquierda una región acotada, mientras que el sentido negativo tiene a su izquierda una region ilimitada.

### 2.6.1 Integrales de contorno

Sea  $f(z)$  una función compleja, continua en todos los puntos de una curva simple  $C$  de longitud finita que une a los puntos  $a$  y  $b$ . La curva se subdivide en  $n$  segmentos a través de los puntos  $\{z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b\}$ , y se coloca un punto  $\tilde{z}_k$  sobre cada uno de los segmentos  $z_{k-1} z_k$  (figura 2.30). Con esta subdivisión puede hacerse una suma de



**Figura 2.30:** Partición de la curva  $C$  en  $n$  segmentos.

integración de forma análoga al caso de funciones de variable real:

$$S_n = f(\tilde{z}_1)(z_1 - z_0) + f(\tilde{z}_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\tilde{z}_n)(z_n - z_{n-1}) \quad (2.56)$$

Si se denota  $z_k - z_{k-1}$  como  $\Delta z_k$  entonces la suma anterior se puede expresar como

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k \quad (2.57)$$

Si  $n$  se hace crecer de tal modo que la magnitud del mayor intervalo  $|\Delta_k|$  se aproxime a un diferencial  $dz$  infinitesimalmente pequeño, entonces la suma  $S_n$  se aproximará a un valor que no depende de la subdivisión de la curva, denominado *integral de contorno* o *integral de línea* de  $f(z)$  a lo largo de  $C$ , denotado como

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k$$

La notación

$$\oint_C f(z) dz$$

con un pequeño círculo en el centro de la integral se utiliza para representar el caso especial en que la trayectoria de integración es cerrada, es decir, el punto inicial  $a$  es igual al punto final  $b$ .

Si se utiliza  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , con  $z = x + jy$  entonces la integral anterior puede expresarse como

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C [u(x, y) + jv(x, y)] (dx + jdy) \\ &= \int_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \int_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \end{aligned} \quad (2.58)$$

que corresponden con integrales de línea de variable real. Estas integrales pueden calcularse utilizando la expresión paramétrica de  $C$ , de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} [u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))] \left( \frac{d}{dt}x(t) + j \frac{d}{dt}y(t) \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ u(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}x(t) - v(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}y(t) \right] dt \\ &\quad + j \int_{t_a}^{t_b} \left[ v(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}x(t) + u(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}y(t) \right] dt \end{aligned} \quad (2.59)$$

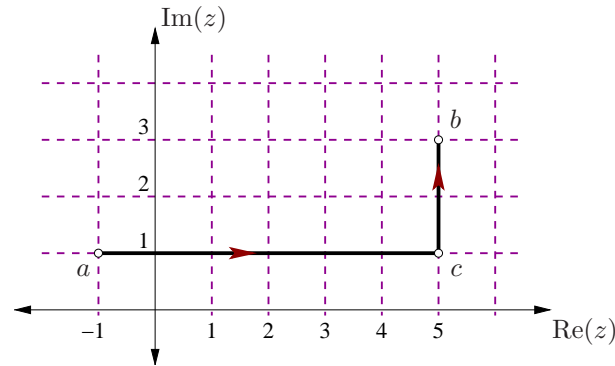


**Ejemplo 2.21** Encuentre el valor de la integral de línea

$$\int_C z^2 dz$$

para la trayectoria de integración  $C$  de  $a = (-1 + j)$  a  $b = (5 + j3)$  formada por dos segmentos de recta, de  $a = (-1 + j)$  a  $c = (5 + j)$  y el segundo de  $c = (5 + j)$  a  $b = (5 + j3)$ .

**Solución:** Nótese que el primer segmento  $ac$  es horizontal y el segundo  $cb$  es vertical (figura 2.31).



**Figura 2.31:** Trayectoria de integración  $C$  para el ejemplo 2.21.

Como

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy)$$

entonces con (2.58)

$$I = \int_C z^2 dz = \int_C [(x^2 - y^2) dx - 2xy dy] + j \int_C [(2xy dx + (x^2 - y^2) dy)]$$

Esta integral se puede separar como la suma de las integrales en los dos segmentos  $I = I_{ac} + I_{cb}$ . Para el primero de ellos, por ser horizontal se tiene que  $y$  es constante ( $y = 1$ ) y por tanto  $dy = 0$ :

$$\begin{aligned} I_{ac} &= \int_{-1}^5 (x^2 - 1) dx + j \int_{-1}^5 2x dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-1}^5 + j [x^2]_{-1}^5 = 36 + j24 \end{aligned}$$

El segundo segmento  $cb$  es vertical con  $x$  constante ( $x = 5$ ) y por tanto  $dx = 0$ :

$$\begin{aligned} I_{cb} &= \int_1^3 -10y dy + j \int_1^3 (25 - y^2) dy \\ &= [-5y^2]_1^3 + j \left[ 25y - \frac{1}{3}y^3 \right]_1^3 \\ &= -40 + j \frac{124}{3} \end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_C z^2 dz = I_{ac} + I_{cb} = (36 + j24) + \left(-40 + j\frac{124}{3}\right) = -4 + j\frac{196}{3}$$

2.21

En el ejemplo anterior el integrando es analítico en todo el plano complejo  $z$ . En dicho caso siempre se va a cumplir que si la integral indefinida de  $f(z)$  es  $F(z)$ , entonces el valor de la integral

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a)$$

donde  $a$  y  $b$  son los puntos inicial y final de la curva  $C$  respectivamente. El lector puede verificar el resultado anterior conociendo que  $F(z) = z^3/3$ .

**Ejemplo 2.22** Encuentre la integral de  $f(z) = 1/(z - z_0)$  con una trayectoria circular de radio  $r$  alrededor del punto constante complejo  $z_0$ .

**Solución:** El cálculo de esta integral se puede simplificar haciendo uso de la sustitución de variable  $\tilde{z} = z - z_0$ . Puesto que  $d\tilde{z} = dz$  entonces

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z}$$

donde  $\tilde{C}$  es entonces ahora una trayectoria circular de radio  $r$  alrededor del origen del plano  $\tilde{z}$ . Esta circunferencia se puede representar paraméricamente como

$$\tilde{z}(t) = r \cos t + jr \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y su derivada es por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) &= -r \sin t + jr \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ &= j^2 r \sin t + jr \cos t \\ &= j(r \cos t + jr \sin t) \\ &= j\tilde{z}(t) \end{aligned}$$

Utilizando (2.59) se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} d\tilde{z}(t) &= \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cos t + jr \sin t} j(r \cos t + jr \sin t) dt = j \int_0^{2\pi} dt = 2\pi j \end{aligned}$$

De forma equivalente, la integral anterior se puede obtener utilizando como parametrización de la circunferencia  $\tilde{z}(t) = re^{jt}$ , con derivada  $d\tilde{z}(t)/dt = jre^{jt} = j\tilde{z}(t)$ . Entonces

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} d\tilde{z}(t) = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} jre^{jt} dt = j \int_0^{2\pi} dt = 2\pi j$$

Nótese que si se integrara en sentido de las manecillas del reloj (por ejemplo utilizando  $t$  de 0 a  $-2\pi$ ), entonces el resultado de esta integral sería  $-2\pi j$ .

En resumen, si se integra en una trayectoria circular centrada en un polo simple, en sentido contrario a las manecillas del reloj, el valor de la integral es  $2\pi j$ , independientemente del radio de dicha trayectoria circular y de la ubicación del polo. 2.22

**Ejemplo 2.23** Encuentre la integral de  $f(z) = 1/(z - z_0)^n$ , para  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$  alrededor de una circunferencia de radio  $r$ .

**Solución:** Prosiguiendo como en el ejemplo anterior se reemplaza primero  $\tilde{z} = z - z_0$  y  $d\tilde{z} = dz$ , lo que también traslada la trayectoria circular al origen de  $\tilde{z}$ . De esta forma se utiliza como curva:

$$\tilde{z}(t) = re^{jt}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = jre^{jt} = j\tilde{z}(t)$$

y considerando que  $n \neq 1$  entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{(\tilde{z}(t))^n} d\tilde{z}(t) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{jnt}} jre^{jt} dt \\ &= jr^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{jt(1-n)} dt = jr^{1-n} \left. \frac{e^{jt(1-n)}}{j(1-n)} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{r^{1-n}}{1-n} (e^{j(1-n)2\pi} - 1) = 0 \end{aligned}$$

puesto que  $(1-n)$  es entero y  $e^{j2k\pi} = 1$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Resumiendo, y considerando el resultado del ejemplo anterior:

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \quad (2.60)$$

para una trayectoria de integración circular cerrada  $C$  centrada en el polo  $z_0$  y en sentido positivo (sentido contrario a las manecillas del reloj). 2.23

Volviendo a la definición de la suma integral (2.57), si se asume que la magnitud de la función  $f(z)$  nunca supera el valor de una constante positiva  $M$ , es decir  $|f(z)| \leq M$  para todo valor de  $z$  sobre la trayectoria de integración  $C$ , entonces, aplicando la desigualdad de Minkowski se obtiene:

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\tilde{z})| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$$

donde  $|\Delta z_k|$  representa la longitud del segmento de recta entre  $z_k$  y  $z_{k-1}$ , por lo que

$$\lim_{\Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| = L$$

denota la longitud  $L$  de la trayectoria de integración  $C$ . Esto implica

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad (2.61)$$

es decir, la magnitud de la integral de contorno sobre la curva  $C$  es siempre menor al producto del mayor valor de la magnitud de la función  $M \geq |f(z)|$  y la longitud  $L$  de la curva  $C$ . A esta importante propiedad se le denomina la *desigualdad ML* y se utilizará en varias demostraciones posteriores.

### 2.6.2 Teorema de la integral de Cauchy

El *Teorema de la integral de Cauchy* establece que si  $f(z)$  es una función analítica con derivada  $f'(z)$  continua en todos los puntos dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$ , entonces se cumple

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (2.62)$$

Para demostrar este teorema se parte del hecho de que  $f(z = x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  es analítica dentro y sobre  $C$  y su derivada  $f'(z)$  es continua, lo que permite asumir que también  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  tienen derivadas parciales continuas en la misma región definida por  $C$ . Por estas razones es posible aplicar el Teorema de Green (ver apéndice A) que establece bajo las condiciones dadas que

$$\oint_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) = \iint_R \left( -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.63)$$

donde  $R$  es la región acotada por  $C$ . El lado derecho de este teorema sigue el mismo patrón que ambos sumandos en la ecuación (2.58) si  $C$  se elige cerrada:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \oint_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \\ &= \iint_R \left( -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy + j \iint_R \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0 + j0 \end{aligned}$$

donde se ha considerado que  $f(z)$  es analítica y por lo tanto se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que los integrandos de la última expresión son cero. Puede demostrarse que este teorema sigue siendo válido aún sin la restricción de continuidad de  $f'(z)$ , en cuyo caso recibe el nombre de teorema de Cauchy-Goursat o teorema fundamental de integración compleja.

El teorema de la integral de Cauchy junto con el ejemplo 2.23, donde se encontró (2.60) permiten observar que, para que el valor de una integral de contorno cerrada sea cero, el hecho de que la función sea analítica es una condición suficiente, pero no necesaria.

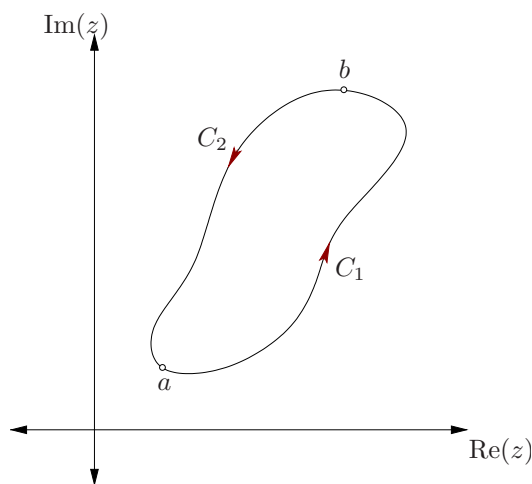
Una de las consecuencias más importantes del teorema de la integral de Cauchy es la independencia de la trayectoria de integración de un punto  $a$  a un punto  $b$  para una integral de contorno si el integrando es una función analítica. Esto se observa eligiendo dos puntos cualesquiera sobre una curva cerrada sobre y dentro de la cual la función  $f(z)$

es analítica (figura 2.32). Puesto que

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

donde considerando que si se invierte la dirección de, por ejemplo  $C_2$ , lo que se denota por  $-C_2$  y, como  $C_1$ , también va de  $a$  hacia  $b$ , entonces

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{-C_2} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z) dz = \int_{-C_2} f(z) dz$$



**Figura 2.32:** Independencia de integración de  $a$  hacia  $b$  con respecto a la trayectoria

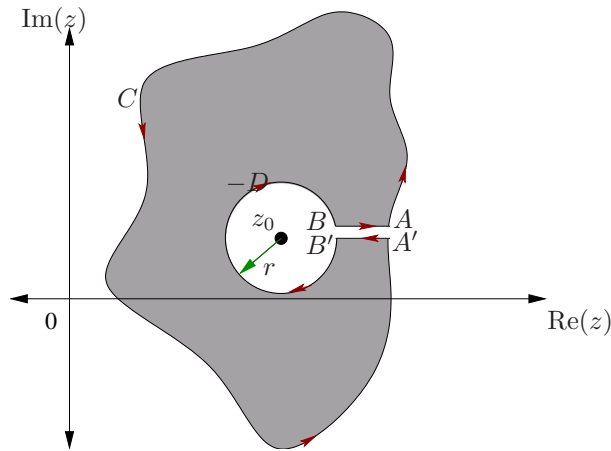
En la práctica se utilizan con frecuencia funciones polinomiales racionales, como por ejemplo

$$f_1(z) = \frac{1}{z - z_0}, \quad f_2(z) = \frac{z}{(z - z_0)^2(z + z_1)}$$

que contienen singularidades del tipo polos. Para poder evaluar integrales con estas funciones se utiliza normalmente una deformación de la trayectoria de Jordan que evita incluir la singularidad dentro de la región acotada, tal y como lo muestra la figura 2.33. El ancho del canal entre  $BA$  y  $B'A'$  se elige infinitesimalmente pequeño, de tal modo que el segmento de  $B$  a  $A$  es prácticamente idéntico al que va de  $A'$  a  $B'$  pero en sentido contrario. El segmento de curva  $D$  puede ser, por ejemplo, un círculo cerrado de radio  $r$ , centrado en la singularidad, pero recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj. El contorno  $C$  es un segmento de curva también prácticamente cerrado. Nótese que el interior de la región siempre se encuentra al lado izquierdo en el sentido de la trayectoria. Por el Teorema de la integral de Cauchy, la integral por esta trayectoria debe ser cero, por lo que

$$\oint_C f(z) dz + \int_{A'B'} f(z) dz + \oint_{-D} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0$$

donde el signo en  $-D$  denota que el sentido de la trayectoria es negativo (en el sentido de las manecillas del reloj).



**Figura 2.33:** Deformación del contorno para evitar una singularidad.

Puesto que  $A'B'$  y  $BA$  son prácticamente el mismo segmento, se cumple

$$\int_{A'B'} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz$$

y considerando que

$$\oint_{-D} f(z) dz = - \oint_D f(z) dz$$

entonces

$$\oint_C f(z) dz = \oint_D f(z) dz \quad (2.64)$$

es decir, el valor de la integral de contorno alrededor de un polo es independientemente de la trayectoria de integración elegida para rodear al polo.

**Ejemplo 2.24** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z - (2 + j)} dz$$

alrededor de cualquier contorno cerrado que incluya a  $z = 2 + j$ .

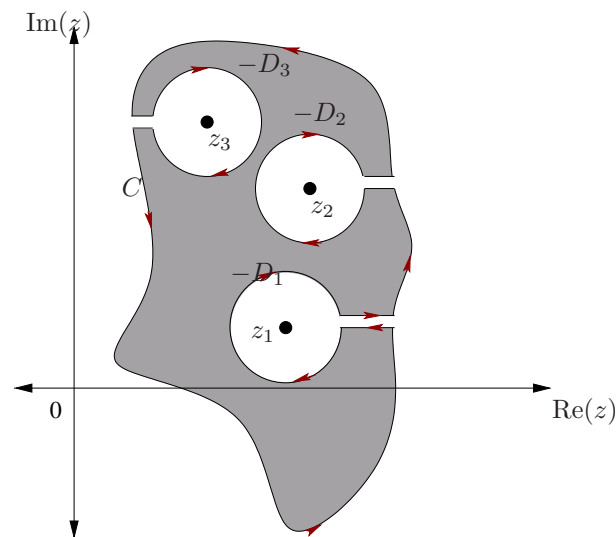
**Solución:** Haciendo un cambio de variable  $\tilde{z} = z - (2 + j)$  se tiene  $d\tilde{z} = dz$  y la ecuación anterior se reduce a:

$$\oint_C \frac{1}{z - (2 + j)} dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z}$$

Considerando la ecuación (2.64), esta integral es igual a integrar en un círculo de un radio  $r$  suficientemente pequeño para estar incluido en la región delimitada por  $\tilde{C}$ . La ecuación (2.60) indica entonces que el valor de esta integral es  $2\pi j$ . 2.24

En general, si la curva  $C$  encierra a varias singularidades, se puede proceder de forma análoga al principio anterior y evadir las singularidades como lo muestra la figura 2.34, con lo que se obtiene para  $n$  singularidades dentro de  $C$ :

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{D_1} f(z) dz + \oint_{D_2} f(z) dz + \oint_{D_3} f(z) dz + \dots + \oint_{D_n} f(z) dz \quad (2.65)$$



**Figura 2.34:** Deformación del contorno para evitar varias singularidades.

**Ejemplo 2.25** Encuentre el valor de la integral de contorno cerrado de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+j)}$$

si la trayectoria de integración

1. contiene a ambas singularidades
2. contiene a  $z = -j$ , pero no a  $z = 1$

**Solución:** La integral se simplifica si se separa el integrando en fracciones parciales:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1-j}{(z-1)} + \frac{1+j}{(z+j)} \right]$$

puesto que ahora la integral se puede reescribir como

$$\oint_C f(z) dz = \frac{1}{2} \left[ (1-j) \underbrace{\oint_C \frac{1}{z-1} dz}_{I_1} + (1+j) \underbrace{\oint_C \frac{1}{z+j} dz}_{I_2} \right]$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  se pueden calcular fácilmente considerando resultados anteriores.

Para el caso en que  $C$  encierra ambos polos entonces  $I_1 = I_2 = 2\pi j$  y así:

$$\oint_C f(z) dz = \frac{2\pi j}{2} 2 = 2\pi j$$

Para el caso en que  $C$  solo encierra a  $z = -j$  entonces  $I_1$  es cero por el teorema de Cauchy e  $I_2 = 2\pi j$ , lo que resulta en

$$\oint_C f(z) dz = \frac{2\pi j}{2} (1+j) = \pi(-1+j)$$

### 2.6.3 Fórmula de la integral de Cauchy

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre un contorno de integración simple y conexo  $C$ . Si  $z_0$  se encuentra dentro de  $C$  entonces

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0) \quad (2.66)$$

o lo que es equivalente

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (2.67)$$

Esta llamada *Fórmula de la integral de Cauchy* puede demostrarse sustituyendo en el lado izquierdo de (2.66)

$$f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$$

lo que resulta en

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

El ejemplo 2.22 junto con el resultado en (2.64) muestra que la integral en el primer sumando del lado derecho de la ecuación es igual a  $2\pi j$ , por lo que ahora corresponde demostrar que la segunda integral es igual a cero. Puesto que el integrando es analítico en todo  $z \neq z_0$ , entonces se puede deformar el contorno de integración para excluir a  $z_0$ , tal y como se mostró en la figura 2.33. Como  $f(z)$  es analítica en  $z = z_0$  entonces es también continua, por lo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad .$$

Esto quiere decir que la distancia entre  $f(z)$  y  $f(z_0)$  se podrá hacer arbitrariamente pequeña ( $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ ) acercando cuanto sea necesario  $z$  a  $z_0$  ( $|z - z_0| < \delta$ ):

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Si se elige entonces el círculo  $D$  que excluye a  $z_0$  en el contorno deformado, con un radio  $r$  menor que  $\delta$ , y además se toma  $\delta = |z - z_0|$ , entonces se cumplen las desigualdades

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\delta} < \frac{\epsilon}{r}$$

y puesto que la longitud de la trayectoria circular de integración  $D$  es  $2\pi r$  entonces por la desigualdad  $ML$  (2.61), y considerando (2.64) se tiene

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_D \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon$$

y como lo anterior debe ser válido para cualquier valor positivo de  $\epsilon$ , incluyendo aquellos arbitrariamente pequeños, se concluye que la integral

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$



con lo que la fórmula de la integral de Cauchy queda demostrada.

En las siguientes secciones será necesario utilizar una fórmula similar a la anterior, pero con el polo introducido de orden superior a uno. Para encontrar el valor de esta integral se calculará ahora la derivada por definición, es decir

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Utilizando la fórmula integral de Cauchy (2.67), se pueden reemplazar los términos en el numerador del límite considerando una curva  $C$  que encierra al punto  $z_0$ , dentro y sobre la cual  $f(z)$  es analítica:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \left[ \oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \oint_C \left[ \frac{f(z)(z - z_0) - f(z)(z - (z_0 + \Delta z))}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} dz \end{aligned}$$

Si  $\Delta z$  se hace tender a cero, entonces el último término parece tender a

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

lo que puede corroborarse observando la tendencia de la resta

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)^2} dz$$

cuando  $\Delta z$  se aproxima a cero. Puesto que  $f(z)$  es analítica sobre  $C$ , quiere decir que su magnitud está acotada y entonces  $|f(z)| \leq M$ . Si  $d$  es la distancia mínima entre  $z_0$  y los puntos  $z \in C$  (ver figura 2.35) entonces se cumple para todos los puntos  $z$  sobre  $C$

$$|z - z_0|^2 \geq d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2}$$

Además, puesto que  $\Delta z$  se está haciendo tender a cero, entonces puede elegirse  $|\Delta z|$  tal que sea menor o igual que  $d/2$ , entonces para todo  $z \in C$  se cumple (figura 2.35):

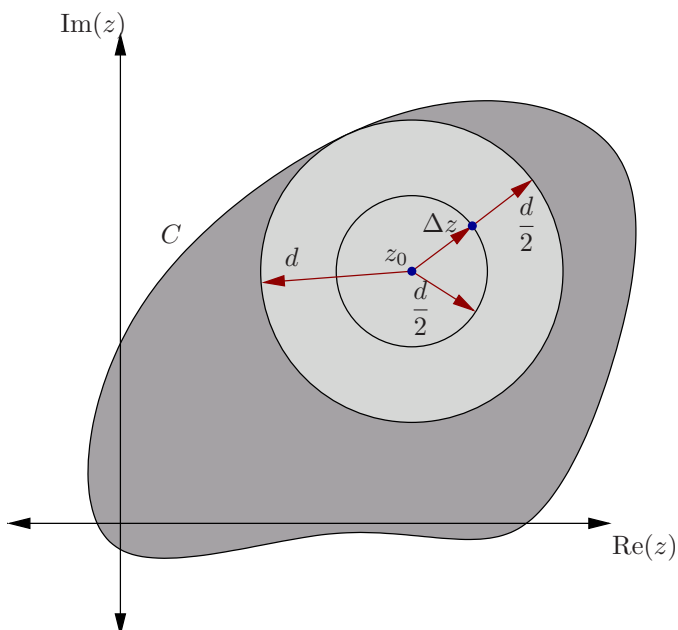
$$|z - (z_0 + \Delta z)| \geq \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z - (z_0 + \Delta z)|} \leq \frac{2}{d}$$

Si la longitud de  $C$  es  $L$ , entonces por la desigualdad  $ML$  (2.61) se tiene

$$\left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)^2} dz \right| \leq M|\Delta z| \frac{2}{d} \frac{1}{d^2} L = \frac{2ML}{d^3} |\Delta z|$$

que tiende a cero si  $|\Delta z| \rightarrow 0$ . Por lo tanto se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$



**Figura 2.35:** Ayuda gráfica para comprender demostración de generalización de la fórmula integral de Cauchy.

De hecho, este resultado puede utilizarse para demostrar de forma similar al procedimiento anterior que también se cumple:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

y en general

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

que también puede escribirse como:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \frac{2\pi j}{n!}$$

Un resultado importante de las derivaciones anteriores es que si una función es analítica en un dominio  $R$ , entonces tiene derivadas de *todos* los órdenes también en  $R$ , que son a su vez funciones analíticas en el mismo dominio y que estarán dadas para un punto  $z_0$  en  $R$  por (2.68). Esto es una diferencia fundamental con las funciones derivables de variable real, en cuyo caso no puede concluirse nada acerca de la existencia de derivadas de ordenes superiores si la función es derivable.

**Ejemplo 2.26** Encuentre el valor de la integral de contorno cerrado de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z + j)}$$

si la trayectoria de integración contiene a ambas singularidades.

**Solución:** Por medio de (2.65) la integral se calcula como:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{D_1} f(z) dz + \oint_{D_2} f(z) dz$$

donde  $D_1$  contiene solo a  $z = 1$  y  $D_2$  solo a  $z = -j$ .

El primer término se puede escribir entonces como

$$\oint_{D_1} f(z) dz = \oint_{D_1} \frac{z}{(z-1)(z+j)} dz = \oint_{D_1} \frac{\frac{z}{z+j}}{z-1} dz$$

lo que ahora se puede calcular utilizando la fórmula integral de Cauchy como

$$\oint_{D_1} f(z) dz = 2\pi j \left( \frac{z}{z+j} \Big|_{z=1} \right) = 2\pi j \frac{1}{1+j} = \pi(1+j)$$

El segundo término se resuelve de forma análoga:

$$\oint_{D_2} f(z) dz = \oint_{D_2} \frac{z}{(z-1)(z+j)} dz = \oint_{D_2} \frac{\frac{z}{z-1}}{z+j} dz$$

y con la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{D_2} f(z) dz = 2\pi j \left( \frac{z}{z-1} \Big|_{z=-j} \right) = 2\pi j \frac{-j}{-j-1} = \pi(-1+j)$$

De forma tal que

$$\oint_C f(z) dz = \pi(1+j) + \pi(-1+j) = 2\pi j$$

que coincide con el resultado obtenido anteriormente en el ejemplo 2.25. 2.26

## 2.6.4 Teorema del Residuo

Sea  $f(z)$  una función analítica excepto en un número finito de singularidades dentro de la región  $S$  delimitada por la curva  $C$ . Si el contorno se deforma para excluir a las singularidades, entonces

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_{D_1} f(z) dz + \oint_{D_2} f(z) dz + \dots + \oint_{D_n} f(z) dz$$

donde  $D_i$  es una pequeña región circular que evade a la singularidad  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (figura 2.34). Asíumase que  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_i$ , lo que conduce a un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}^{(i)}}{(z-z_i)^m} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z-z_i} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z-z_i) + \dots + a_k^{(i)}(z-z_i)^k + \dots$$

válida en el anillo  $r_i < |z - z_i| < R_i$ .

Ahora, si se integra en el círculo  $D_i$  que rodea a  $z_i$  se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{D_i} f(z) dz &= \oint_{D_i} \left[ \frac{a_{-m}^{(i)}}{(z - z_i)^m} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z - z_i} \right. \\ &\quad \left. + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z - z_i) + \dots + a_k^{(i)}(z - z_i)^k + \dots \right] dz \\ &= a_{-m}^{(i)} \oint_{D_i} \frac{1}{(z - z_i)^m} dz + \dots + a_{-1}^{(i)} \oint_{D_i} \frac{1}{z - z_i} dz \\ &\quad + a_0^{(i)} \oint_{D_i} dz + a_1^{(i)} \oint_{D_i} (z - z_i) dz + \dots + a_k^{(i)} \oint_{D_i} (z - z_i)^k dz + \dots \end{aligned}$$

De acuerdo al ejemplo 2.23, todas integrales en la última ecuación son cero excepto la que multiplica al residuo  $a_{-1}^{(i)}$ , por lo que

$$\oint_{D_i} f(z) dz = a_{-1}^{(i)} 2\pi j$$

con lo que finalmente se obtiene

$$I = \oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n a_{-1}^{(i)}.$$

Esta conclusión es conocida como *teorema del residuo* y afirma que si  $f(z)$  es una función analítica dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$ , excepto en un número finito de polos, entonces su valor será igual a  $2\pi j$  multiplicado por la suma de todos los residuos de  $f(z)$  para las singularidades dentro de  $C$ .

**Ejemplo 2.27** Evalúe la integral

$$\int_C \frac{1}{z(1+z)} dz$$

si  $C$  es

1.  $|z| = \frac{1}{2}$
2.  $|z| = 2$

**Solución:**

Las singularidades están en  $z_1 = 0$  y  $z_2 = -1$ , y los residuos están dados por (2.54):

$$\begin{aligned} a_{-1}^{(1)} \Big|_{z_1=0} &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z+1)} = 1 \\ a_{-1}^{(2)} \Big|_{z_2=-1} &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z(z+1)} = -1 \end{aligned}$$

así que para el primer caso, donde la curva solo encierra al polo  $z_1 = 0$ , el resultado de la integral es

$$\int_C \frac{1}{z(1+z)} dz = 2\pi j$$

y para el segundo caso, donde ambos polos se encuentran dentro del círculo entonces

$$\int_C \frac{1}{z(1+z)} dz = 2\pi j(1-1) = 0$$

2.27

## 2.7 Integración sobre semicírculos extensos

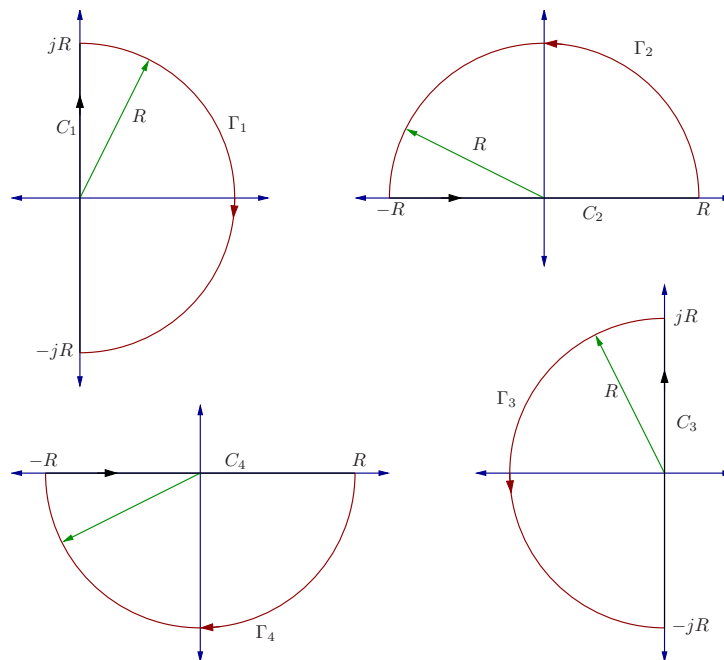
En secciones subsiguientes se utilizará la integración en contornos cerrados semicirculares como los mostrados en la figura 2.36, donde interesa estudiar varios casos donde  $R$  tiende a infinito. Primero considérense los dos casos siguientes para el semicírculo  $\Gamma_1$ :

$$\text{Caso 1: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz \quad (2.69)$$

$$\text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Caso 2: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z)e^{az} dz \quad (2.70)$$

$$\text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } a \in \mathbb{R}, a < 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



**Figura 2.36:** Trayectorias de integración semicirculares de radio  $R$ .

La construcción  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |g(Re^{j\theta})| = 0$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , donde  $g(Re^{j\theta}) = f(Re^{j\theta})$  ó  $g(Re^{j\theta}) = Rf(Re^{j\theta})$ , implica que la función  $g(z)$  converge *uniformemente* a cero sobre todo el semicírculo  $\Gamma_1$  de radio  $R$ , cuando éste radio se hace crecer indefinidamente. En otros términos, para todo valor real positivo  $\epsilon$ , existe un radio suficientemente grande  $R_0$ ,

a partir del cual el mayor valor absoluto de la función  $g(z)$  en todos los semicírculos de radio  $R > R_0$  es siempre menor que  $\epsilon$ , o expresado matemáticamente:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max |g(Re^{j\theta})| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists R_0 \in \mathbb{R}^+ : R > R_0 \Rightarrow |g(Re^{j\theta})| < \epsilon$$

El semicírculo  $\Gamma_1$  se puede describir como  $z = Re^{j\theta}$  con  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . De este modo el diferencial  $dz$  está dado por  $dz = jRe^{j\theta}d\theta$ . En el Caso 1, considerando el sentido de integración mostrado en la figura 2.36 se cumple:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = -j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Re^{j\theta} f(Re^{j\theta}) d\theta$$

con lo que se deriva si  $R > R_0$

$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z) dz \right| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R |f(Re^{j\theta})| d\theta < \pi\epsilon$$

Puesto que  $\pi\epsilon$  puede elegirse arbitrariamente pequeño entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0$$

Para el Caso 2

$$\int_{\Gamma_1} f(z)e^{az} dz = -j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Re^{j\theta} f(Re^{j\theta}) e^{aR \cos \theta} e^{jaR \sin \theta} d\theta$$

con lo que se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z)e^{az} dz \right| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R |f(Re^{j\theta})| e^{aR \cos \theta} d\theta$$

Si se elige  $R > R_0$  entonces  $|f(Re^{j\theta})| < \epsilon$ . Además, puesto que el coseno es una función par en  $\theta$ , entonces el término exponencial también es par, por lo que se debe cumplir:

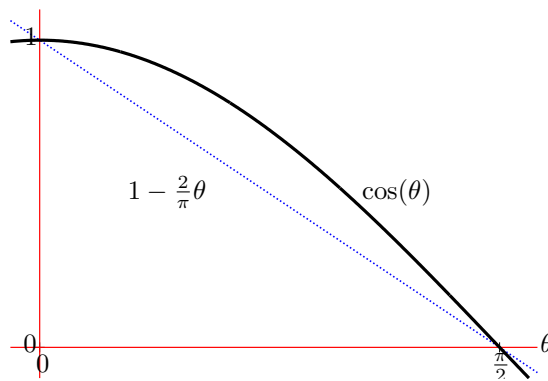
$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z)e^{az} dz \right| \leq 2R\epsilon \int_0^{\pi/2} e^{aR \cos \theta} d\theta$$

Para analizar la expresión anterior se utiliza la desigualdad ilustrada en la figura 2.37, donde se aprecia

$$1 - \frac{2}{\pi}\theta \leq \cos \theta, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Para el intervalo indicado, ambas funciones adquieren valores entre cero y uno. Con esto en mente, y considerando que el valor real  $a$  es estrictamente menor que uno, se cumple

$$e^{aR \cos \theta} \leq e^{aR} e^{-2aR\theta/\pi} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$



**Figura 2.37:** Sustitución del  $\cos \theta$  por una función lineal siempre menor que el coseno en un intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

con lo que se deduce

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz \right| &\leq 2R\epsilon \int_0^{\pi/2} e^{aR \cos \theta} d\theta \leq 2R\epsilon e^{aR} \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi\epsilon e^{aR}}{-a} (e^{-aR} - 1) \\ &= \frac{\pi\epsilon}{|a|} (1 - e^{-aR}) < \frac{\pi\epsilon}{|a|} \end{aligned}$$

Por lo tanto, puesto que  $\epsilon$  puede elegirse arbitrariamente pequeño, se debe cumplir:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz = 0 \quad a \in \mathbb{R}, a < 0$$

Los siguientes dos casos son similares a los anteriores, pero utilizando el semicírculo  $\Gamma_2$  (figura 2.36):

$$\begin{aligned} \text{Caso 3: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz & \quad (2.71) \\ \text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max_{\theta} |Rf(Re^{j\theta})| &= 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso 4: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) e^{jaz} dz & \quad (2.72) \\ \text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max_{\theta} |f(Re^{j\theta})| &= 0 \text{ para } a \in \mathbb{R}, a > 0, 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

El Caso 3 se analiza del mismo modo que el Caso 1, con lo que se obtiene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

Para el Caso 4

$$\int_{\Gamma_2} f(z) e^{jaz} dz = j \int_0^{\pi} Re^{j\theta} f(Re^{j\theta}) e^{jaR \cos \theta} e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

con lo que se obtiene

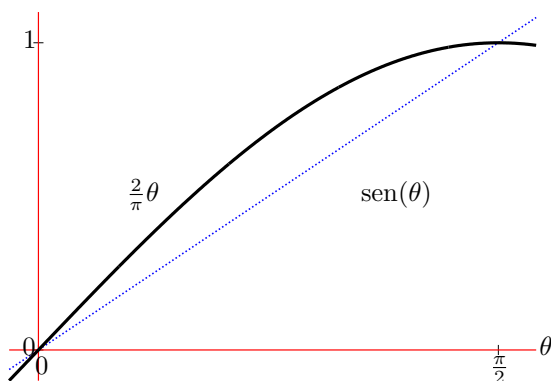
$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) e^{jaz} dz \right| \leq \int_0^{\pi} R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

Si se elige  $R > R_0$  entonces  $|f(Re^{j\theta})| < \epsilon$ . La integral al lado derecho se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\int_0^\pi R|f(Re^{j\theta})|e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} R|f(Re^{j\theta})|e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi R|f(Re^{j\theta})|e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta$$

El primer término se puede analizar haciendo uso de la relación mostrada en la figura 2.38, considerando que el valor real  $a$  es, en este caso particular, positivo, y asumiendo que  $R > R_0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} R|f(Re^{j\theta})|e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta &\leq \int_0^{\pi/2} R\epsilon e^{-aR2\theta/\pi} d\theta \\ &\leq R\epsilon \frac{(1 - e^{-aR})\pi}{2aR} \\ &< \frac{\epsilon\pi}{2a} \end{aligned}$$



**Figura 2.38:** Sustitución del  $\text{sen}\theta$  por una función lineal siempre menor que el seno en un intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Por medio de un cambio de variable  $\phi = \theta - \pi/2$ , o aplicando el hecho de que para el intervalo de  $\pi/2$  a  $\pi$  se cumple  $\text{sen}\theta \geq 2 - \frac{2}{\pi}\theta$ , el lector puede demostrar que para el segundo término se cumple también:

$$\int_{\pi/2}^\pi R|f(Re^{j\theta})|e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta < \frac{\epsilon\pi}{2a}$$

con lo que finalmente se debe cumplir

$$\int_0^\pi R|f(Re^{j\theta})|e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta < \frac{\epsilon\pi}{a}$$

y por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz} dz = 0$$

si  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(Re^{j\theta})| = 0$  con  $a$  real positivo.

Para los contornos  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  se obtienen resultados similares, que se resumen junto a los obtenidos anteriormente en la tabla 2.5. Los últimos cuatro resultados en dicha tabla son conocidos como el *Lema de Jordan*, donde dependiendo de la fuente se prefieren utilizar los semicírculos con orientación vertical ( $\Gamma_1$  o  $\Gamma_3$ ), o los horizontales ( $\Gamma_2$  o  $\Gamma_4$ ).



**Tabla 2.5:** Valores de integrales en los semicírculos extensos mostrados en la figura 2.36.

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_i} f(z) dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  Rf(Re^{j\theta})  = 0$ , para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z)e^{az} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a < 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} f(z)e^{az} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a > 0$ y $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_4} f(z)e^{jaz} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a < 0$ y $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

## 2.8 Evaluación de integrales reales

Los principios de integración analizados hasta el momento pueden utilizarse para simplificar el cálculo de integrales reales definidas. Aquí se evaluarán dos casos.

### 2.8.1 Caso 1: Integrales impropias

La integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

puede continuarse analíticamente en una integral de contorno de variable compleja

$$\int_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz \right]$$

donde la trayectoria de integración  $C$  se ha descompuesto en una línea recta sobre el eje real de  $-R$  a  $R$  ( $R$  es real), y el contorno  $\Gamma$ , que es el semicírculo superior descrito por  $Re^{j\theta}$  con el parámetro  $\theta$  que abarca de 0 a  $\pi$  (figura 2.39). Si este segundo término tiende a cero conforme  $R$  tiende a infinito, entonces

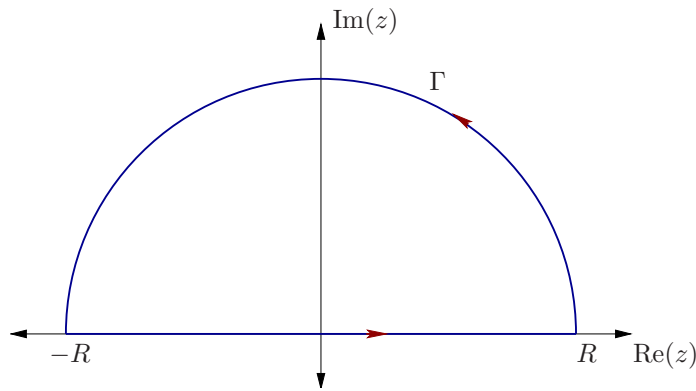
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_C f(z) dz$$

En la sección anterior se demostró que la integral en el arco  $\Gamma$  se hace cero si el producto  $|Rf(z)|$  tiende uniformemente a cero sobre el semicírculo cuando el radio tiende hacia infinito:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \text{ si } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0$$

**Ejemplo 2.28** Encuentre el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$$



**Figura 2.39:** Contorno cerrado para evaluar integrales reales infinitas.

**Solución:** Se considera la continuación analítica de la integral

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz$$

donde  $C$  es el contorno mostrado en la figura 2.39. El integrando tiene dos polos dobles en  $\pm 2j$ , pero el contorno solo encierra al polo en  $z = 2j$ . El residuo en  $2j$  es

$$\begin{aligned} a_{-1}|_{z=2j} &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{d}{dz} \left[ (z - 2j)^2 \frac{1}{(z - 2j)^2 (z + 2j)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{-2}{(z + 2j)^3} = -\frac{2}{(4j)^3} = -\frac{1}{32j} \end{aligned}$$

y por el teorema del residuo

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = 2\pi j \left( -\frac{1}{32j} \right) = \frac{\pi}{16}$$

Puesto que  $R|f(Re^{j\theta})|$  decrece a una tasa  $R^{-3}$  cuando  $R \rightarrow \infty$  entonces la integral en el semicírculo  $\Gamma$  es cero y por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \oint_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = \frac{\pi}{16}$$

2.28

## 2.8.2 Caso 2: Integrales de funciones reales trigonométricas

Si  $G(\sin \theta, \cos \theta)$  es una función racional de senos y cosenos, entonces la integral real

$$\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

puede resolverse a través de integrales de contorno de variable compleja. Si  $z = e^{j\theta}$ , entonces

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} \left( z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

y

$$dz = je^{j\theta}d\theta = jz d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{jz}$$

lo que quiere decir que la integral anterior puede realizarse a través de la integral

$$\int_C f(z)dz$$

donde  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$ .

**Ejemplo 2.29** Evalúe

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$$

**Solución:** Sustituyendo  $z = e^{j\theta}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  y  $d\theta = \frac{dz}{jz}$  se obtiene la integral de variable compleja

$$\oint_C \frac{1}{jz \left[ 2 + \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]} dz = \frac{2}{j} \oint_C \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

donde la trayectoria de integración  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$ . Puesto que el integrando tiene dos polos en  $z = -2 \pm \sqrt{3}$ , el contorno de integración solo incluye a  $z = -2 + \sqrt{3}$ . El residuo del integrando es

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \left[ \frac{2}{j} (z + 2 - \sqrt{3}) \frac{1}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} \right] = \frac{1}{j\sqrt{3}}$$

así que por el teorema del residuo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = 2\pi j \frac{1}{j\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

2.29

Otros casos de integrales reales resueltas por medio de integración compleja encontrará el lector en el análisis del impulso gaussiano (pág. 162), y en el apéndice B.

## 2.9 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [8, 9], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

**Problema 2.1.** Indique qué tipo de estructura algebraica es  $(\mathbb{S}, \{\star\})$ , donde  $\mathbb{S} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , y  $\star \in \{+, \times, -, \div, \wedge\}$ . El símbolo ' $\div$ ' denota división y el símbolo  $\wedge$  potenciación.

**Problema 2.2.** Demuestre utilizando las definiciones de suma y multiplicación en los números naturales que  $a \times 1 = a$ .

**Problema 2.3.** ¿Qué clase de estructura algebraica es  $(\mathbb{Z}, \{-\})$ ?

**Problema 2.4.** Utilizando las definiciones de suma y producto de números complejos en (2.5), calcule:

1.  $(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1)$
2.  $(a, 0) \times (1, 0) + (b, 0) \times (0, 1)$
3.  $(a, b) \times (a, -b)$
4.  $(a, b) + (a, -b)$
5.  $(a, b) - (a, -b)$

**Problema 2.5.** Encuentre la magnitud, argumento, y componentes real e imaginario de los siguientes números complejos:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. $z_1 = j$           | 5. $z_5 = -2e^{j\pi/4}$                                 |
| 2. $z_2 = -j$          | 6. $z_6 = -2e^{-j\pi}$                                  |
| 3. $z_3 = 3 - j4$      | 7. $z_7 = \cos \alpha - 1; \quad \alpha \in \mathbb{R}$ |
| 4. $z_4 = 2e^{j\pi/4}$ | 8. $z_8 = e^{jk\pi}; \quad k \in \mathbb{Z}$            |

**Problema 2.6.** Demuestre que  $j^0 = 1, j^1 = j, j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, \dots, j^{n+4} = j^n, \dots$

**Problema 2.7.** Utilizando la identidad de Euler, encuentre a qué equivalen las expresiones  $\sin(A + B)$  y  $\cos(A + B)$  en términos de senos y cosenos de  $A$  y  $B$  por separado.

**Problema 2.8.** Sume los siguientes números complejos. Verifique las sumas gráficamente:

- |                           |                                      |
|---------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(2 + j5) + (-3 + j2)$ | 3. Si $z = x + jy$ calcule $z + z^*$ |
| 2. $(j3) + (2)$           | 4. Si $z = x + jy$ calcule $z - z^*$ |

**Problema 2.9.** Multiplique los siguientes números complejos.

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 1. $(2 + j2)(-2 + j2)$ | 3. Si $z = x + jy$ calcule $zz^*$        |
| 2. $(j3)(2)$           | 4. Si $z = re^{j\theta}$ calcule $z/z^*$ |

**Problema 2.10.** Calcule las cinco raíces  $-1^{1/5}$  y gráfíquelas en el plano complejo.

**Problema 2.11.** Calcule la magnitud, argumento, parte real y parte imaginaria de los números complejos  $z_i$  resultantes de las operaciones

- |                                  |                          |
|----------------------------------|--------------------------|
| 1. $z_1 = (1 + j\sqrt{3})^{1+j}$ | 4. $z_4 = j^{-j}$        |
| 2. $z_2 = \sqrt{-j}$             | 5. $z_5 = \text{sen}(j)$ |
| 3. $z_3 = j^j$                   | 6. $z_6 = \text{cos}(j)$ |

**Problema 2.12.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se sabe que  $|z| = 2$ ,  $\angle w = \pi/4$  y  $z + w = 1$ . Encuentre gráficamente  $z$  y  $w$ .

**Problema 2.13.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se sabe que  $|z| = 2$ ,  $|w| = 3$  y  $z + w = 4$ . Encuentre gráficamente  $z$  y  $w$ .

**Problema 2.14.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se sabe que  $\angle z = \pi/4$ ,  $\angle w = -\pi/3$  y  $z + w = 4$ . Encuentre gráficamente  $z$  y  $w$ .

**Problema 2.15.** Demuestre que la recta en el plano  $z = x + jy$  dada por la ecuación

$$y = mx + b$$

es transformada por el mapeo  $w = \alpha z + \beta$  a la recta

$$v = K_1 u + K_2$$

donde  $w = u + jv$  y

$$K_1 = \frac{\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}$$

$$K_2 = \frac{\alpha_{\text{Im}}b - \beta_{\text{Re}}}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}(\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m) + \alpha_{\text{Re}}b + \beta_{\text{Im}} \quad .$$

**Problema 2.16.** Otra posible demostración de que un mapeo lineal conserva la forma de rectas o un círculos es utilizando representaciones paramétricas de las mismas. Considerando que una recta se describe como

$$z(t) = z_m t + z_b$$

con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z_m, z_b \in \mathbb{C}$ ,  $z_m = \text{cte}$ ,  $z_b = \text{cte}$ , y que un círculo puede representarse como

$$z(t) = r e^{jt} + z_0$$

con  $t \in [0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r = \text{cte}$ ,  $z_0 = \text{cte}$ , demuestre que el mapeo  $w = \alpha z + \beta$  no cambia la forma de la recta o del círculo.

**Problema 2.17.** Encuentre las ecuaciones en la forma  $y = mx + b$  de las siguientes rectas en el plano  $z$ , con  $z = x + jy$ ,  $x, y, m, b \in \mathbb{R}$ .

1.  $|z - p| = |z - q|$ ,  $p, q \in \mathbb{C}$
2.  $|z - (2 - j)| = |z - (-3 + j)|$
3.  $|z + z^* + 4j(z - z^*)| = 6$

**Problema 2.18.** Encuentre el punto de intersección y el ángulo de intersección de las rectas  $|z - (1 + j)| = |z - (3 - j)|$  y  $|z - (1 - j)| = |z - (3 + j)|$

**Problema 2.19.** Dibuje las regiones representadas por las siguientes ecuaciones, si  $r, \phi \in \mathbb{R}^+$ :

- |                                   |                                   |                                    |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $ z  < r$                      | 5. $ \operatorname{Im}\{z\}  < r$ | 9. $ \operatorname{Im}\{z\}  > r$  |
| 2. $ z - z_0  < r$                | 6. $\operatorname{Im}\{z\} < r$   | 10. $\operatorname{Im}\{z\} > r$   |
| 3. $ \operatorname{Re}\{z\}  < r$ | 7. $ \operatorname{Re}\{z\}  > r$ | 11. $\operatorname{Re}\{ z \} < r$ |
| 4. $\operatorname{Re}\{z\} < r$   | 8. $\operatorname{Re}\{z\} > r$   | 12. $ \angle z  < \phi$            |

**Problema 2.20.** Encuentre la imagen de la línea  $6x + y = 22$  (con  $z = x + jy$ ) en el plano  $w$  bajo el mapeo  $w = jz + 4 - j3$ .

**Problema 2.21.** Encuentre la región en el plano  $w$  a la que es mapeada la región  $y > 1$  del plano  $z = x + jy$  si  $w = (1 - j)z$ .

**Problema 2.22.** Encuentre a qué es mapeado el semiplano  $x > 0$  del plano  $z = x + jy$  bajo la transformación  $w = jz + j$ .

**Problema 2.23.** Encuentre la transformación que hace el mapeo  $w = jz + 1$  a la franja semi-infinita  $x > 0$ ,  $0 < y < 2$  en el plano  $z = x + jy$ .

**Problema 2.24.** Encuentre las imágenes que realiza el mapeo  $w = (\sqrt{3} + j)z - 1 + j\sqrt{3}$  de las siguientes curvas del plano  $z = x + jy$ :

- |            |                         |
|------------|-------------------------|
| 1. $y = 0$ | 3. $ z  = 1$            |
| 2. $x = 0$ | 4. $x^2 + y^2 + 2y = 1$ |

**Problema 2.25.** El mapeo lineal  $w = f(z) = \alpha z + \beta$  cumple  $j = f(1 + j)$  y  $(1 + j) = f(-1)$ .

1. Determine  $\alpha$  y  $\beta$  (úselos en el resto del problema).
2. Encuentre la imagen de  $\operatorname{Im}(z) > 0$
3. Encuentre la imagen de  $|z - 2| < 2$
4. Encuentre los puntos fijos del mapeo

**Problema 2.26.** Demuestre que el mapeo de inversión  $w = 1/z$  transforma círculos centrados en el eje real del plano  $z$  en círculos centrados en el eje real del plano  $w$  o en rectas verticales, y que transforma círculos centrados en el eje imaginario del plano  $z$  en círculos centrados en el eje imaginario del plano  $w$ , o en rectas horizontales.

**Problema 2.27.** Sea  $C$  un círculo en el plano complejo  $z$  descrito paramétricamente como

$$C : z(t) = re^{j2\pi t} + z_0$$

con  $|z_0| \neq r$  y  $t \in [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ . Si el parámetro  $t$  se hace variar desde 0 hasta 1, el círculo es descrito en sentido antihorario.

Indique qué sentido describe la imagen de dicho círculo ante el mapeo de inversión  $w = 1/z$ , cuando

1.  $r < |z_0|$
2.  $r > |z_0|$ .

Para las dos condiciones anteriores indique a qué es mapeado el interior del círculo.

**Problema 2.28.** Calcule la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z - 3| = 2$  utilizando el mapeo  $w = 1/z$ .

**Problema 2.29.** Utilice división polinomial para demostrar los resultados en la ecuación (2.23) de la página 34.

**Problema 2.30.** Demuestre que el mapeo inverso de  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  es también un mapeo bilineal. Verifique que los determinantes de ambos mapeos son iguales.

**Problema 2.31.** Qué tipo de rectas describe la ecuación  $|z - a| = |z - b|$  si además se cumple que  $|a - 2j|^2 = |b - 2j|^2$ . (Ayuda: revise los conceptos indicados en la figura 2.13)

Generalice el concepto si la condición dada es  $|a - c| = |b - c|$ , con  $c \in \mathbb{C}$  constante.

**Problema 2.32.** Demuestre que el mapeo bilineal del ejemplo 2.5 transforma cualquier línea que no pasa por  $z = -1$  en un círculo que pasa por  $\Gamma = 1$ . Encuentre los puntos fijos de ese mapeo. ¿A qué es mapeado el círculo unitario del plano  $z$ ?

**Problema 2.33.** Encuentre la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z| = 2$  y su interior bajo el mapeo bilineal

$$w = \frac{z - j}{z + j}$$

**Problema 2.34.** Encuentre la transformación bilineal  $w = f(z)$  que satisface  $j = f(0)$ ,  $-j = f(1)$ ,  $0 = f(-1)$ .

**Problema 2.35.** Encuentre la imagen del semiplano  $y > c$  bajo el mapeo de inversión  $w = 1/z$ , donde  $z = x + jy$ , y  $c = \text{cte} \in \mathbb{R}$ . Analice los casos  $c > 0$ ,  $c = 0$  y  $c < 0$ .

**Problema 2.36.** Encuentre la imagen en el plano  $w = 1/z$  de

1. El círculo

$$\left| z + \frac{3}{4} + j \right| = \frac{7}{4}$$

2. El disco  $|z - a| \leq a$ , con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$

**Problema 2.37.** Encuentre el mapeo bilineal  $w = f(z)$  que cumpla  $j = f(0)$ ,  $1 = f(-j)$  y  $0 = f(-1)$ . Encuentre la imagen con el mapeo encontrado de las rectas horizontales y verticales en el plano  $z$ . Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Problema 2.38.** Dado el mapeo bilineal

$$w = \frac{1 + j}{z}$$

1. Indique las operaciones involucradas en el mapeo, tales como rotaciones, inversiones, traslaciones, etc.
2. Encuentre las imágenes de  $z = 1$ ,  $z = 1 - j$  y  $z = 0$  en el plano  $w$ .
3. Encuentre la imagen del interior de círculo unitario  $|z| < 1$  en el plano  $z$ .
4. Encuentre las imágenes de las rectas  $x = y$  y  $x + y = 1$  si  $z = x + jy$ .
5. Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Problema 2.39.** Dado el mapeo bilineal

$$w = \frac{z + 1}{z - 1}$$

encuentre la imagen del arco semicircular  $x^2 + y^2 = 1$  para  $x \leq 0$  descrito del punto  $(0, -1)$  al punto  $(0, 1)$ .

**Problema 2.40.** Encuentre a qué mapea

$$w = \frac{z + j}{z - 3}$$

la región del plano  $z = x + jy$  entre las rectas  $x = y$  y  $y = 0$  con  $x < 0$  en el plano  $w$ . Encuentre qué construcción geométrica en el plano  $z$  corresponde al círculo unitario del plano  $w$ .

**Problema 2.41.** Encuentre a qué corresponde en el plano  $w$  la región del plano  $z = x + jy$  dada por  $y \geq 0$  bajo el mapeo

$$w = f(z) = e^{j\theta_0} \frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

Encuentre los valores particulares de  $z_0$  y  $\theta_0$  si se cumple  $f(j) = 0$  y  $f(\infty) = -1$ .

**Problema 2.42.** Demuestre que la composición de dos mapeos bilineales es a su vez un mapeo bilineal. Es decir, si

$$w' = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$w = \frac{a'w' + b'}{c'w' + d'}$$



entonces el mapeo  $w = f(z)$  es también bilineal.

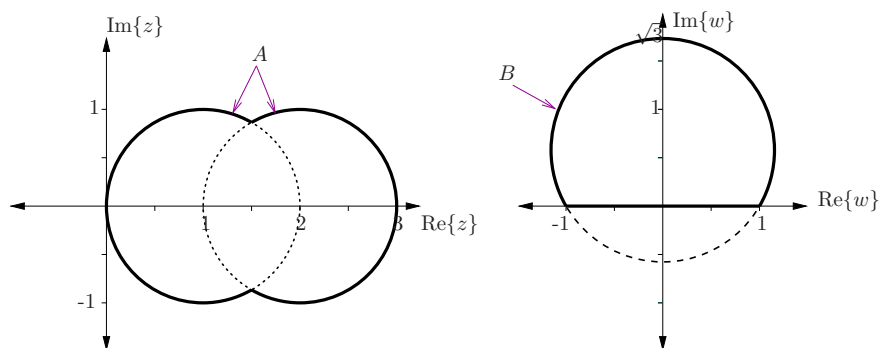
**Problema 2.43.** Demuestre que un mapeo bilineal tiene uno, dos o infinitos puntos fijos.

**Problema 2.44.** Una propiedad interesante del mapeo bilineal es que existe solo una transformación de este tipo capaz de mapear tres puntos dados  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  en tres puntos específicos  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  respectivamente. Demuestre que la transformación bilineal está dada por:

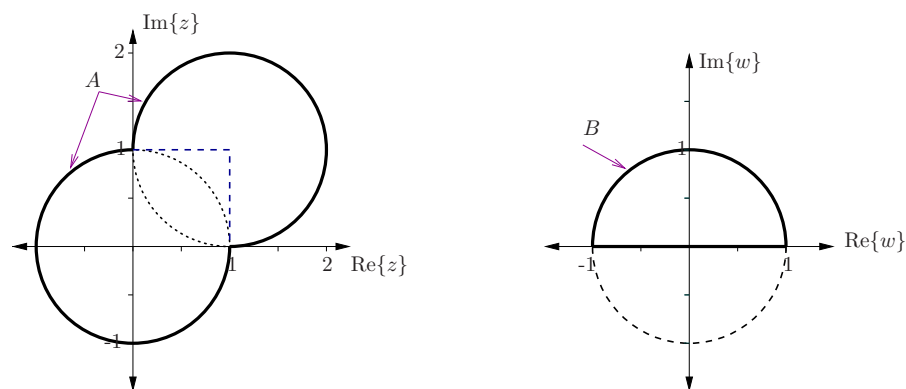
$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

**Problema 2.45.** Encuentre el mapeo bilineal  $w = f(z)$  más general que mapea el círculo unitario  $|z| = 1$  en el círculo unitario  $|w| = 1$  y que cumple además  $f(z_0) = 0$ .

**Problema 2.46.** Encuentre un mapeo bilineal  $w = f(z)$  que transforme la curva  $A$  del plano  $z$  mostrada a la izquierda de la siguiente figura, en la curva  $B$  del plano  $w$  mostrada a la derecha, si se sabe que la sección de la curva  $A$  ubicada sobre  $|z - 1 - j| = 1$  es transformada en el segmento de recta que une  $-1$  y  $1$  en el plano  $w$ .



**Problema 2.47.** Encuentre un mapeo bilineal  $w = f(z)$  que transforme la curva  $A$  del plano  $z$  mostrada a la izquierda de la siguiente figura, en la curva  $B$  del plano  $w$  mostrada a la derecha, si se sabe que la sección de la curva  $A$  ubicada sobre  $|z - 1| = 1$  es transformada en el segmento de recta que une  $-1$  y  $1$  en el plano  $w$ .



**Problema 2.48.** Indique si siempre es posible encontrar un mapeo bilineal que transforme cualquier par de círculos que se intersecan en exactamente dos puntos, en la figura de la derecha del problema 2.47.

**Problema 2.49.** Encuentre un mapeo bilineal que transforme el semicírculo al lado derecho de la figura en el problema 2.47 a un semicírculo igual, pero tal que el segmento de recta es transformado al semicírculo, y el semicírculo al segmento de recta.

**Problema 2.50.** Encuentre la imagen en el plano  $w$  de las siguientes regiones bajo el mapeo  $w = e^z$ .

1.  $x > 0$
2.  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
3.  $\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \infty$

**Problema 2.51.** Demuestre, utilizando la descomposición del coseno y seno como combinación lineal de dos exponenciales complejas, que para  $z = x + jy \in \mathbb{C}$  se cumple:

- $\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$
- $\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$
- $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$
- $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

**Problema 2.52.** Verifique que la función  $f(z) = e^{\alpha z}$ ,  $\alpha = \text{cte} \in \mathbb{C}$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y calcule su derivada.

**Problema 2.53.** En qué región de  $\mathbb{C}$  son las siguientes funciones analíticas

1.  $ze^z$
2.  $zz^*$
3.  $\sin 4z$
4.  $\cos 2z$

**Problema 2.54.** Qué valores de  $a$  y  $b$  hacen que

$$w = f(z = x + jy) = x^2 + ay^2 - 2xy + j(bx^2 - y^2 + 2xy)$$

sea analítica, y que forma tiene entonces  $f'(z)$ .

**Problema 2.55.** Encuentre una función  $v(x, y)$  conjugada a  $u(x, y) = 2x(1 - y)$ , y encuentre entonces  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  y  $f'(z)$ .

**Problema 2.56.** Demuestre que  $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$  es una función armónica y encuentre una función conjugada armónica  $v(x, y)$ . Escriba  $f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$  en términos de  $z$  si  $z = x + jy$ .

**Problema 2.57.** Demuestre que  $u(x, y) = \sin x \cosh y$  es armónica y encuentre la función

conjugada armónica  $v(x, y)$ . Encuentre  $f(z = x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  en términos de  $z$ .

**Problema 2.58.** Encuentre trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

1.  $x^3y - xy^3 = \kappa$ , con  $\kappa$  constante real
2.  $e^{-x} \cos y + xy = \kappa$ , con  $\kappa$  constante real

**Problema 2.59.** Encuentre las componentes real e imaginaria de las funciones

1.  $f(z) = z^2 e^{2z}$
2.  $\operatorname{sen} 2z$

y determine la región de  $\mathbb{C}$  en la que son analíticas y sus derivadas en esas regiones.

**Problema 2.60.** Determine los puntos o regiones donde los siguientes mapeos *no* son conformes:

1.  $w = z^2 - 1$
2.  $w = 2z^3 - 21z^2 + 72z + 6$
3.  $w = 8z + \frac{1}{2z^2}$
4.  $w = \operatorname{sen} z$

**Problema 2.61.** Encuentre y grafique las imágenes de las líneas verticales y horizontales para los mapeos  $\operatorname{sen} z$ ,  $\operatorname{cos} z$  y  $\operatorname{Ln} z$ . ¿Dónde son estos mapeos conformes?

**Problema 2.62.** Demuestre que

$$w = z + \frac{a^2}{z}$$

transforma el círculo  $|z| = a$  en un segmento de recta en el plano  $w$ . Encuentre la longitud del segmento de recta. Encuentre la imagen de  $|z| = b \neq a$ .

**Problema 2.63.** Demuestre que  $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$

**Problema 2.64.** Encuentre la representación en serie de potencias de la función  $1/(z-j)$  en las regiones

1.  $|z| < 1$
2.  $|z| > 1$
3.  $1 < |z - 1 - j| < \sqrt{2}$

**Problema 2.65.** Encuentre por división polinomial las representaciones en serie de potencias de  $\frac{1}{z^2+1}$  centradas en  $z_0 = 0$ .

**Problema 2.66.** Encuentre los desarrollos en Series de Taylor para las siguientes funciones centradas en los puntos dados

1.  $\frac{1}{1+z}$ , en  $z_0 = 1$ .
2.  $\frac{1}{z(z-4j)}$ , en  $z_0 = 2j$ .
3.  $\frac{1}{z^2}$ , en  $z_0 = 1+j$ .
4.  $\frac{1}{1+z+z^2}$ , en  $z_0 = 0$ .

**Problema 2.67.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

alrededor de  $z_0 = 0$  y  $z_0 = 1$ , y especifique las posibles regiones de convergencia en cada caso.

**Problema 2.68.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

alrededor de

1.  $z_0 = 0$
2.  $z = a \neq 0, a \in \mathbb{C}$

**Problema 2.69.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

en una expansión en serie de Laurent válida para las regiones de convergencia

1.  $|z| < 1$
2.  $1 < |z| < 2$
3.  $|z| > 2$
4.  $|z-1| > 1$
5.  $0 < |z-2| < 1$

**Problema 2.70.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

si esta se centra en  $z_0 = 0$ , para la región de convergencia  $1 < |z| < 2$ .

**Problema 2.71.** Para la función

$$f(z) = \frac{z}{(z+j)(z-j)}$$

indique cuántas y cuáles regiones de convergencia son posibles para la serie de Laurent centrada en  $z_0 = 1+j$ . Encuentre las series en cada una de dichas regiones.

**Problema 2.72.** Indique qué tipos de singularidades y ceros tienen las siguientes funciones:

1.  $\frac{\cos z}{z^2}$
2.  $\frac{1}{(z+j)^2(z-j)}$
3.  $\frac{z}{z^4-1}$
4.  $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2+\pi}$
5.  $e^{\frac{z}{1-z}}$
6.  $\frac{z-1}{z^2+1}$
7.  $\frac{z+j}{(z+2)^2(z-3)}$
8.  $\frac{1}{z^2(z^2-4z+5)}$

**Problema 2.73.** Encuentre los desarrollos de Laurent para las siguientes funciones alrededor de  $z_0 = 0$  e indique el tipo de singularidad:

1.  $\frac{1 - \cos z}{z}$
2.  $\frac{e^{z^2}}{z^3}$

**Problema 2.74.** Determine los residuos de la función  $1/(1+z^4)$  en cada uno de sus polos en el plano finito  $z$ .

**Problema 2.75.** Calcule los residuos de las siguientes funciones en cada uno de sus polos finitos, a menos que se especifique lo contrario:

1.  $\frac{2z+1}{z^2-z-2}$
2.  $\frac{1}{z^2(1-z)}$
3.  $\frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}$
4.  $\frac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z}$
5.  $\frac{z^6+4z^4+z^3+1}{(z-1)^5}$
6.  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
7.  $\frac{\cos z}{z}$  solo en  $z=0$
8.  $\frac{z}{\operatorname{sen} z}$  solo en  $z=\pi$
9.  $\frac{1}{(z^2+1)^2}$  solo en  $z=j$

**Problema 2.76.** Utilizando la definición de la integral de contorno para funciones de variable compleja, demuestre que si el sentido de la trayectoria de integración se invierte, entonces la integral adquiere el valor de la integral con el sentido original pero negado, es decir:

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

donde  $-C$  representa al contorno de integración en el sentido contrario a  $C$ .

**Problema 2.77.** En la demostración del valor que toma una integral de contorno cerrada en el cual la trayectoria de integración encierra a un polo, se utilizó la deformación del

contorno tal y como lo muestra la figura 2.33. Se eligieron allí líneas rectas para pasar de  $A$  a  $B$  y luego de  $B'$  a  $A'$ . Discuta qué ocurre si se tomaran dos curvas simples cualesquiera para sustituir esos segmentos de recta, que pasan solo por puntos donde la función es analítica.

**Problema 2.78.** Evalúe las integrales

$$\int_C (z^2 + 3z) dz$$

$$\int_C (x^2 + y^2 + j(3x + y)) dz$$

para los contornos  $C$

1. segmento de recta de  $2$  a  $j2$
2. contorno de dos segmentos de recta, primero de  $2$  a  $(2 + j2)$ , y luego a  $j2$ .
3. segmento del círculo  $|z| = 2$  que va en sentido positivo de  $2$  a  $j2$ .

**Problema 2.79.** Evalúe

$$\oint_C (5z^4 - z^3 + 2) dz$$

para las trayectorias de integración

1.  $|z| = 1$
2. el cuadrado con vértices  $0$ ,  $1$ ,  $1 + j$  y  $j$ .
3. una curva compuesta por la parábola  $y = x^2$  de  $0$  a  $1 + j$  y  $y^2 = x$  de  $1 + j$  a  $0$ .

**Problema 2.80.** Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{dz}{z - 4}$$

para un contorno cerrado que contiene a  $z = 4$ , y para otro contorno que lo excluye.

**Problema 2.81.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{2z}{(2z - 1)(z + 2)} dz$$

para los contornos  $|z| = 1$  y  $|z| = 3$ .

**Problema 2.82.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{5z}{(z + 1)(z - 2)(z + j4)} dz$$

para los contornos  $|z| = 3$  y  $|z| = 5$ .

**Problema 2.83.** Evalúe las siguientes integrales

$$\oint \frac{z^3 + z}{(2z + 1)^3} dz \quad C : |z| = 1$$

$$\oint \frac{4z}{(z - 1)(z + 2)^2} dz \quad C : |z| = 3$$

**Problema 2.84.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz$$

para los contornos  $|z| = 1$  y  $|z| = 3$ .

**Problema 2.85.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z^2 + 2z + 2)} dz$$

para el contorno  $|z| = 3$ .

**Problema 2.86.** Demuestre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

si además se sabe que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi$$

y  $\Gamma_2$  es el contorno semicircular ilustrado en la figura 2.36 de la página 85.

**Problema 2.87.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 1} dz$$

donde  $C$  es

1. el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
2. el círculo  $|z| = 2$

**Problema 2.88.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z^2 + 3jz - 2}{z^3 + 9z} dz$$

donde  $C$  es

1. el círculo  $|z| = 1$
2. el círculo  $|z| = 4$

**Problema 2.89.** Calcule los residuos de todos los polos de la función

$$f(z) = \frac{(z^2 + 2)(z^2 + 4)}{(z^2 + 1)(z^2 + 6)}$$

y con ellos calcule la integral

$$\oint_C f(z) dz$$

con el contorno  $C$  definido como

1. el círculo  $|z| = 2$
2. el círculo  $|z - j| = 1$
3. el círculo  $|z| = 4$

**Problema 2.90.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z^2(1+z^2)^2} dz$$

donde la trayectoria de investigación  $C$  es

1. el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
2. el círculo  $|z| = 2$

**Problema 2.91.** Con la ayuda del teorema del residuo evalúe las siguientes integrales de contorno:

$$1. \oint_C \frac{3z^2 + 2}{(z-1)(z^2+4)} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 1.1.  $|z-2| = 2$
- 1.2.  $|z| = 4$

$$2. \oint_C \frac{(z^2 - 2z)}{(z+1)^2(z^2+4)} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 2.1.  $|z+j| = 2$
- 2.2.  $|z| = 3$

$$3. \oint_C \frac{1}{(z+1)^3(z-1)(z-2)} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 3.1.  $|z| = \frac{1}{2}$
- 3.2.  $|z+1| = 1$
- 3.3. el rectángulo con vértices en  $\pm j$  y  $3 \pm j$ .

$$4. \oint_C \frac{(z-1)}{(z^2-4)(z+1)^4} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 4.1.  $|z| = \frac{1}{2}$
- 4.2.  $|z + \frac{3}{2}| = 2$
- 4.3. el triángulo con vértices en  $-\frac{3}{2} + j$ ,  $-\frac{3}{2} - j$  y  $3$ .

**Problema 2.92.** Utilizando una integral de contorno apropiada, evalúe las siguientes integrales de funciones de valor y variable real:



1. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

2. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

3. 
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2} dx$$

7. 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta} d\theta$$

8. 
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

4. 
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

5. 
$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{5 + 4 \operatorname{sen} \theta} d\theta$$

6. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$$

9. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$$

10. 
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + 2 \cos \theta} d\theta$$

